1. 行列の n 乗

$\boxed{1}$

次の行列の n 乗 (n は自然数) を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

(頻出問題)

$\boxed{2}$

$A=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とし, n は自然数とする。

(1) A の n 乗 A^n を求めよ。

(2) 行列の積 $AA^2A^3\cdots A^n$ を求めよ。

(早稲田大)

・大切なのは, どれだけたくさんのことをしたかではなく
どれだけ心を込めたかです。

$\boxed{3}$

θ を実数とし, 行列 $R=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ。

(1) 行列 R の逆行列 R^{-1} を求めよ。

(2) 行列 $A=\begin{pmatrix}11 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 9\end{pmatrix}$ について, 行列の積 $R^{-1}AR$ が適当な実数 λ_1, λ_2 を用いて $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ の形になるような θ を $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で求めよ。

(3) (2) の行列 A について, n を自然数として, A^n を求めよ。ただし, 必要であれば以下の公式を用いてよい。

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} \text{ のとき } D^n=\begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n\end{pmatrix}$$

（芝浦工業大）

$\boxed{4}$

以下の問いに答えよ。

(1) 実数 a に対し, 2 次の正方行列 A, P, Q が 5 つの条件

$$A=aP+(a+1)Q\ ,\ P^2=P\ ,\ Q^2=Q\ ,\ PQ=O\ ,\ QP=O$$

をみたすとする。ただし $O=\begin{pmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ である。このとき, $(P+Q)A=A$ が成り立つことを示せ。

(2) a は正の数として, 行列 $A=\begin{pmatrix}a & 0 \\ 1 & a+1\end{pmatrix}$ を考える。この A に対し, (1) の 5 つの条件をすべてみたす行列 P, Q を求めよ。

(3) n を 2 以上の整数とし, $2\leqq k\leqq n$ をみたす整数 k に対して $A_k=\begin{pmatrix}k & 0 \\ 1 & k+1\end{pmatrix}$ とおく。行列の積 $A_nA_{n-1}A_{n-2}\cdots A_2$ を求めよ。

（東京大）

・我々の最大の敗北は, なれたかもしれない存在と
　実際になった存在との相違で構成されている。

$\boxed{5}$

a , b , c , d を実数とし, 行列

$$A=\begin{pmatrix} a & 2a \\ b & 2b \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} c & -3c \\ d & -3d \end{pmatrix}$$

は $A+B=E$ を満たすものとする。ただし, E は単位行列である。このとき次の問いに答えよ。

(a) a と b の値はそれぞれ $a=\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$, $b=\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ である。

(b) A^2 , B^2 , $AB+BA$ はそれぞれ

$$A^2=\frac{1}{\boxed{ス}}\begin{pmatrix} \boxed{セ} & \boxed{ソ} \\ \boxed{タ} & \boxed{チ} \end{pmatrix}, B^2=\frac{1}{\boxed{ツ}}\begin{pmatrix} \boxed{テ} & -\boxed{ト} \\ -\boxed{ナ} & \boxed{ニ} \end{pmatrix}, AB+BA=\begin{pmatrix} \boxed{ヌ} & \boxed{ネ} \\ \boxed{ノ} & \boxed{ハ} \end{pmatrix}$$

である。

(c) $M=\dfrac{1}{3}A-\dfrac{1}{2}B$ とし, 自然数 n に対して $M^n=\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix}$ とおく。このとき

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n=\frac{\boxed{ヒ}}{\boxed{フ}}$ である。

（東京理科大）

$\boxed{6}$

2 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ。ただし, a , b , c , d は実数とする。

(1) $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を満たす A は存在しないことを示せ。

(2) $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ を満たす A をすべて求めよ。

(3) (2) で求めた A のそれぞれについて $A+A^2+A^3+\cdots+A^{2013}$ を求めよ。

（筑波大）

・心の中で素晴らしい考えを育てなさい。なぜなら,
自分が考えている以上に素晴らしい人間にはなれないのだから。

２．回転行列

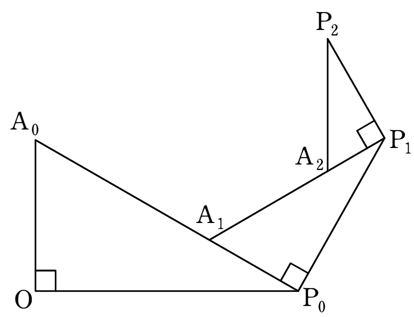
$\boxed{1}$

$0<a<1$ とする。座標平面上で原点 A_0 から出発して x 軸の正の方向に a だけ進んだ点を A_1 とする。次に A_1 で進行方向を反時計回りに $120°$ 回転し a^2 だけ進んだ点を A_2 とする。以後同様に A_{n-1} で反時計回りに $120°$ 回転して a^n だけ進んだ点を A_n とする。このとき点列 $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots\cdots$ の極限の座標を求めよ。

（東工大）

$\boxed{2}$

座標平面上で $\mathrm{A}_0(0, 1)$, $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{P}_0(\sqrt{3}, 0)$ として $\triangle\mathrm{A}_0\mathrm{OP}_0$ を考える。これに, $\triangle\mathrm{A}_0\mathrm{OP}_0$ の各辺の長さを $\dfrac{2}{3}$ 倍した$\triangle\mathrm{A}_1\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$ を右図のようにおく。同様に $n\geqq 1$ についても, $\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ の各辺の長さを $\dfrac{2}{3}$ 倍して, 直角を P_n に合わせて $\triangle\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ をおいていく。$\mathrm{P}_n(x_n, y_n)$ として, $a=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $b=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ とするとき, (a, b) を求めよ。



（早稲田大）

・粘り強さを身につけよ。それは, どんな才能や運にも勝る成功の源だ。

$\boxed{3}$

実数 a , b に対し平面上の点 $\mathrm{P}_n(x_n\,,\,y_n)$ を

$$(x_0\,,\,y_0)=(1\,,\,0)$$
$$(x_{n+1}\,,\,y_{n+1})=(ax_n-by_n\,,\,bx_n+ay_n)\quad(n=0\,,1\,,2\,,\cdots)$$

によって定める。このとき, 次の条件（ｉ）, （ⅱ）がともに成り立つような $(a\,,\,b)$ をすべて求めよ。

（ｉ）$\mathrm{P}_0=\mathrm{P}_6$

（ⅱ）$\mathrm{P}_0\,,\,\mathrm{P}_1\,,\,\mathrm{P}_2\,,\,\mathrm{P}_3\,,\,\mathrm{P}_4\,,\,\mathrm{P}_5$ は相異なる。

（東京大）

$\boxed{4}$

座標平面上において, 方程式 $3x^2+2xy+3y^2=12$ で表される図形 C を考える。

行列 $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ を用いると, この方程式は $(x\quad y)A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=12$ と表せる。

$0<\theta<\pi$ である θ を用いて, $P=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ と表される行列 P が, ある実数 α , β $(\alpha<\beta)$ に対し, $AP=P\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$ を満たすとする。このとき, $\theta=$ $\boxed{\text{（ア）}}$ であり,

$\alpha=$ $\boxed{\text{（イ）}}$, $\beta=$ $\boxed{\text{（ウ）}}$ である。$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}s\\ t\end{pmatrix}$ とおくと, 図形 C の方程式

$3x^2+2xy+3y^2=12$ は

$$\frac{s^2}{\boxed{\text{（エ）}}}+\frac{t^2}{\boxed{\text{（オ）}}}=1$$

となる。

図形 C 上の 2 点間の距離の最大値は $\boxed{\text{（カ）}}$ であり, この最大値を与える図形 C 上の 2 点の座標は $\boxed{\text{（キ）}}$ と $\boxed{\text{（ク）}}$ である。

（慶応大）

・人間は手に入れるものによって生計を立て
与えるものによって人生をつくる。

３. 一次変換

$\boxed{1}$

座標平面上で, 直線 $y=x$ に関する対称移動を f とし, 実数 c に対して, 直線 $y=cx$ に関する対称移動を g とする。また, 原点を中心とする 120° の回転移動を h とする。

(1) f を表す行列, および h を表す行列を求めよ。

(2) g を表す行列を求めよ。

(3) 合成変換 $f\circ g$ が h になるように c の値を定めよ。

（北海道大）

$\boxed{2}$

n を自然数とする。xy 平面上で行列 $\begin{pmatrix} 1-n & 1 \\ -n(n+1) & n+2 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換（移動ともいう）を f_n とする。次の問に答えよ。

(1) 原点O$(0\,,0)$ を通る直線で, その直線上のすべての点が f_n により同じ直線上に移されるものが 2 本あることを示し, この 2 直線の方程式を求めよ。

(2) (1) で得られた 2 直線と曲線 $y=x^2$ によって囲まれる図形の面積 S_n を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n-\frac{1}{6}}$ を求めよ。

（東工大）

・どんなことも, リングに立つ前から勝者は決まっている。
勝敗を決めるのは, 歓声のない孤独な努力なのだから。

$\boxed{3}$

a を実数とし, $A=\begin{pmatrix} a+1 & a \\ 3 & a+2 \end{pmatrix}$ とする。2 点 $\mathrm{P}(x\,,\,y)$, $\mathrm{Q}(X\,,\,Y)$ について

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成り立つとき, P は A により Q に移るという。

(1) 原点以外の点で, A によりそれ自身に移るものが存在するとき, a を求めよ。

(2) 次の条件 $(*)$ をみたす a , k を求めよ。

　　$(*)$　直線 l : $y=kx+1$ 上のすべての点は, A により l 上の点に移る。

(3) $(*)$ をみたす a , k に対し, 直線 l 上の点で, A によりそれ自身に移るものを求めよ。

（筑波大）

$\boxed{4}$

xy 平面上において円 C : $x^2+y^2=1$ と直線 $l:2x-y=0$ を考える。

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換によって, 円 C はどのような図形に移るか。理由をつけて答えなさい。

(2) 円 C と直線 l との交点の座標は $\left(\boxed{（ヒ）}, \boxed{（フ）}\right)$, $\left(\boxed{（へ）}, \boxed{（ホ）}\right)$ である。

(3) 円 C を円 C に移し, 直線 l を直線 l に移す 1 次変換を表す行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ をすべて求めなさい。求める過程も示すこと。

（慶応大）

・成功とは, 情熱をなくすことなく
　失敗から次の失敗へと移行することである。

4．行列の応用

$\boxed{1}$

a , b , c , d を実数とし

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。

$A^3=E$ であって $A \fallingdotseq E$ のとき, $a+d$ 及び $ad-bc$ の値を求めよ。

（東京理科大）

$\boxed{2}$

a を実数として, 2 次の正方行列 A , B を次のように定める。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a+1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & -a \end{pmatrix}$$

このとき, $((\cos t)A+(\sin t)B)^2=O$ をみたす実数 t が存在するような a の範囲を求めよ。

ただし, O は零行列とする。

（東北大）

・自分の間違いを認める勇気があるかどうか。
　それが, 大人物と小人物の決定的な違いだ。

$\boxed{3}$

2 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, $\Delta(A)=ad-bc$, $t(A)=a+d$ と定める。

(1) 2 次の正方行列 A , B に対して, $\Delta(AB)=\Delta(A)\Delta(B)$ が成り立つことを示せ。

(2) A の成分がすべて実数で, $A^5=E$ が成り立つとき, $x=\Delta(A)$ と $y=t(A)$ の値を求めよ。ただし, E は 2 次の単位行列とする。

（東工大）

$\boxed{4}$

実数を成分にもつ行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と実数 r , s が下の条件 (i) , (ii) , (iii) をみたすとする。

(i) $s>1$

(ii) $A\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) $A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ $(n=1, 2, \cdots)$ とするとき, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$

このとき以下の問に答えよ。

(1) $B=\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}A\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を a , c , r , s を用いて表せ。

(2) $B^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix}$ $(n=1, 2, \cdots)$ とするとき, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\lim\limits_{n\to\infty} w_n=0$ を示せ。

(3) $c=0$ かつ $|a|<1$ を示せ。

（東京大）

・世の中には三種類の人間がいる。
　夢を見る人, 夢をこわす人, 夢を実現する人。
　夢をこわす人は, 他人の夢もこわし
　夢を実現する人は, 他人の夢の実現も助ける。

$\boxed{5}$

2 行 2 列の行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ を考える。A において, b と c を入れかえた行列を A^T で表す。すなわち, $A^T=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ である。同様に, $B^T=\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ とおく。以下で, B はつねに $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ をみたすものとする。

(1) $A^T=-A$ となるための必要十分条件は $A=\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ であることを証明しなさい。

(2) $A=\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ のとき, すべての B に対して $BAB^T=A$ となることを証明しなさい。

(3) すべての B に対して $BAB^T=A$ が成り立つならば, $A=\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ であることを証明しなさい。

（慶応大）

$\boxed{6}$

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が次の条件 (D) を満たすとする。

(D) A の成分 a , b , c , d は整数である。また, 平面上の 4 点 $(0, 0)$, (a, b), $(a+c, b+d)$, (c, d) は面積 1 の平行四辺形の 4 つの頂点をなす。

$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 行列 BA と $B^{-1}A$ も条件 (D) を満たすことを示せ。

(2) $c=0$ ならば, A に B , B^{-1} のどちらかを左から次々にかけることにより, 4 個の行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ のどれかにできることを示せ。

(3) $|a| \geqq |c| > 0$ とする。BA , $B^{-1}A$ の少なくともどちらか一方は, それを $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とすると

$$|x|+|z|<|a|+|c|$$

を満たすことを示せ。

（東京大）

・**大きな目標を持て。それが偉大な人間をつくる。**