１．三角関数・指数関数・対数関数

$\boxed{1}$

関数 $f(x)=a\sin^2 x+b\cos^2 x+c\sin x\cos x$ の最大値が２，最小値が -1 となる。このような a，b，c をすべて求めよ。ただし，a は整数，b，c は実数とする。

（お茶の水女子大）

$\boxed{2}$

次の方程式を解け。

$$\sin 3x=\sin 2x \quad (0\leqq x<\pi)$$

・勝者は決して諦めない。なぜなら，諦める人は決して勝利しないから。

$\boxed{3}$

$\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}=a$, $\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{6\pi}{7}=b$ とする。a と b の値を求めたい。以下の問いに答えよ。

(1) 角 θ (ラジアン) が $\cos 3\theta=\cos 4\theta$ ……① を満たすとき, 解の 1 つが $\cos\theta$ であるような 4 次方程式を求めよ。

(2) $\theta=\dfrac{2\pi}{7}$ のとき, $\cos\theta$ が解の 1 つであるような 3 次方程式を求めよ。

(3) (2) の結果を用いて, a および b の値を求めよ。

（東京慈恵会医科大）

$\boxed{4}$

次の問いに答えよ。

(1) $\cos 5\theta=f(\cos\theta)$ を満たす多項式 $f(x)$ を求めよ。

(2) $\cos\dfrac{\pi}{10}\cos\dfrac{3\pi}{10}\cos\dfrac{7\pi}{10}\cos\dfrac{9\pi}{10}=\dfrac{5}{16}$ を示せ。

（京都大）

・ベストを尽くすコツは, 学問そのものを楽しむことである。

$\boxed{5}$

$f(x)$, $g(t)$ を

$$f(x)=x^3-x^2-2x+1$$
$$g(t)=\cos 3t-\cos 2t+\cos t$$

とおく。

(1) $2g(t)-1=f(2\cos t)$ が成り立つことを示せ。

(2) $\theta=\dfrac{\pi}{7}$ のとき, $2g(\theta)\cos\theta=1+\cos\theta-2g(\theta)$ が成り立つことを示せ。

(3) $2\cos\dfrac{\pi}{7}$ は3次方程式 $f(x)=0$ の解であることを示せ。

（筑波大）

$\boxed{6}$

数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1=\sqrt{2}\ ,\ a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

によって定められている。

$a_n=2\sin\theta_n$, $0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数 θ_n を求めよ。

（東京大）

・競争相手には, 常に尊敬の念を忘れないこと。
　相手も, 勝ちたいという気持ちは君と同じなんだよ。

$\boxed{7}$

(1) $a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解せよ。

(2) (1) の結果を用いて $x>0$, $y>0$, $z>0$ のとき $\dfrac{x+y+z}{3} \geqq \sqrt[3]{xyz}$ を証明せよ。

(3) α, β, γ は $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$, $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ を満たすものとする。このとき, $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ の最大値を求めよ。

(京都大)

$\boxed{8}$

三角形 ABC において, $\angle \mathrm{A}=60^\circ$ であるとする。

(1) $\sin \mathrm{B}+\sin \mathrm{C}$ の取り得る値の範囲を求めよ。

(2) $\sin \mathrm{B}\sin \mathrm{C}$ の取り得る値の範囲を求めよ。

(一橋大)

・自信がなければ, 自分を洗脳すればよい。

$\boxed{9}$

角 α , β , γ が $\alpha+\beta+\gamma=180°$, $\alpha\geqq 0°$, $\beta\geqq 0°$, $\gamma\geqq 0°$ を満たすとき,
$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\geqq 1$ を示せ。

（京都大）

$\boxed{10}$

xy 平面において, O を原点, A を定点 $(1\,,0)$ とする。また, P , Q は円周 $x^2+y^2=1$ の上を動く 2 点であって, 線分 OA から正の向きにまわって線分 OP にいたる角と, 線分 OP から正の向きにまわって線分 OQ にいたる角が等しいという関係が成り立っているものとする。

点 P を通り x 軸に垂直な直線と x 軸との交点を R , 点 Q を通り x 軸に垂直な直線と x 軸との交点を S とする。実数 $l\geqq 0$ を与えたとき, 線分 RS の長さが l と等しくなるような点 P , Q の位置は何通りあるか。

（東京大）

・**挑戦することをやめない限り, 完全に負けることなんて絶対ない。**

$\boxed{11}$

$A=9^{100}$ について, A の桁数は $\boxed{\quad ア \quad}$ 桁。A の 1 の位の数は $\boxed{\quad イ \quad}$ 。A の最高位の数は $\boxed{\quad ウ \quad}$ 。9^n $(n=1, 2, \cdots, 100)$ において, 最高位の数が 9 となるのは, 9^1 も含めて $\boxed{\quad エ \quad}$ 個である。ただし, $\log_{10}3=0.4771$, $\log_{10}2=0.3010$ である。

$\boxed{12}$

2^{555} は十進法で表すと 168 桁の数で, 最高位 (先頭) の数字は 1 である。集合 $\{2^n \mid n$ は整数で $1 \leqq n \leqq 555\}$ の中に, 十進法で表したとき最高位の数字が 4 となるものは全部で $\boxed{\qquad}$ 個ある。

(早稲田大)

・次, 生まれ変わったらこうしたい, とか言う人がいるが, 次などない。

$\boxed{13}$

x , y は $x \fallingdotseq 1$, $y \fallingdotseq 1$ をみたす正の数で, 不等式

$$\log_x y+\log_y x>2+(\log_x 2)(\log_y 2)$$

をみたすとする。このとき x , y の組 (x , y) の範囲を座標平面上に図示せよ。

（京都大）

$\boxed{14}$

p , q を正の実数とする。x の方程式

$$\log_{10}(px)\cdot\log_{10}(qx)+1=0$$

が 1 より大きい解をもつとき, 点 $(\log_{10}p , \log_{10}q)$ の存在する範囲を座標平面上に図示せよ。

（筑波大）

・どんな目標を持つかによって, あなたがどんな人間になるか決まる。