１. 立体図形

$\boxed{1}$

半径 1 の球が直円錐に内接している。この直円錐の底面の半径を r とし, 表面積を S とする。

(1) S を r を用いて表せ。

(2) S の最小値を求めよ。

（一橋大）

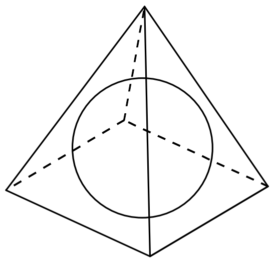
$\boxed{2}$

正四角錐 V に内接する球を S とする。V をいろいろ変えるとき, 比

$$R=\frac{S\text{の表面積}}{V\text{の表面積}}$$

のとりうる値のうち, 最大のものを求めよ。

ここで正四角錐とは, 底面が正方形で, 底面の中心と頂点を結ぶ直線が底面に垂直であるような角錐のこととする。



（東京大）

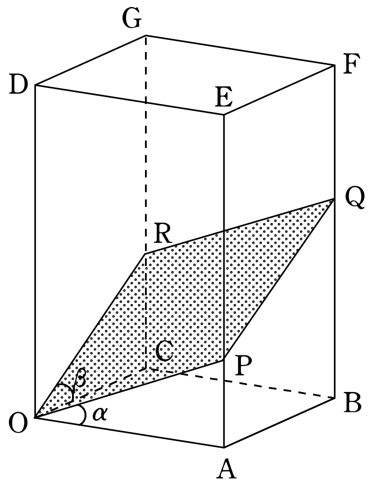
・人生とは実験である。重ねれば重ねるほどに, より良い人生となる。

3

1辺の長さが1の正方形を底面とする四角柱OABC - DEFGを考える。3点P , Q , Rを, それぞれ辺AE , 辺BF , 辺CG上に, 4点O , P , Q , Rが同一平面上にあるようにとる。四角形OPQRの面積をSとおく。また, $\angle$AOPをα , $\angle$CORをβとおく。

(1) Sを$\tan\alpha$と$\tan\beta$を用いて表せ。

(2) $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$, $S=\dfrac{7}{6}$であるとき, $\tan\alpha+\tan\beta$の値を求めよ。さらに, $\alpha\leqq\beta$のとき, $\tan\alpha$の値を求めよ。



（東京大）

4

半径rの球面上に4点A , B , C , Dがある。四面体ABCDの各辺の長さは, AB$=\sqrt{3}$, AC$=$AD$=$BC$=$BD$=$CD$=2$を満たしている。このときrの値を求めよ。

（東京大）

・年を重ねるだけでは, 人は老いない。
理想を失うことによって, 人は老いるのだ。

$\boxed{5}$

半径 r の球面上に異なる 4 点 A , B , C , D がある。

$AB=CD=\sqrt{2}$, $AC=AD=BC=BD=\sqrt{5}$ であるとき,

(1) r を求めよ。

(2) 四面体 ABCD の体積 V を求めよ。

（早稲田大）

$\boxed{6}$

四面体 OABC において, $\angle BAC$ は直角で, $OA=OB=OC=1$ である。このとき四面体 OABC の体積の最大値を求めよ。

（千葉大）

・重要なのは,「何をなすか」ではなく,
「何をなそうと胸を焦がすか」である。

$\boxed{7}$

空間内の点 O に対して, 4 点 A , B , C , D を

　　OA＝1

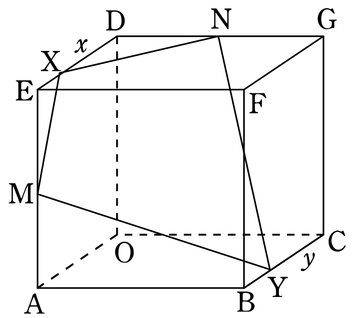
　　OB＝OC＝OD＝4

をみたすようにとるとき, 四面体 ABCD の体積の最大値を求めよ。

（東京大）

$\boxed{8}$

右図のような一辺の長さが 1 の立方体 OABC - DEFG を考える。辺 AE の中点を M , 辺 DG の中点を N とする。X を辺 DE 上の点, Y を辺 BC 上の点とし, DX の長さを x , CY の長さを y とする。このとき, 次の問に答えよ。



(1) 4 点 X , M , Y , N が同一平面上にあるための必要十分条件を x , y を用いて表せ。

(2) x , y が (1) の条件を満たしながら動くとき, 三角形 XMY の面積の最小値と最大値を求めよ。また, そのときの x , y の組をすべて求めよ。

（九州大）

・「一生懸命やって勝つこと」の次に素晴らしいのは,
　「一生懸命やって負けること」である。

$\boxed{9}$

xyz 空間内の点 P$(0,0,1)$ を中心とする半径 1 の球面 K がある。K 上の点 Q(a,b,c) が条件 $a>0$, $b>0$, $c>1$ のもとで K 上を動くとき, Q において K に接する平面を L とし, L が x 軸, y 軸, z 軸と交わる点をそれぞれ A, B, C とする。このような三角形 ABC の面積の最小値を求めよ。

（東京大）

$\boxed{10}$

四面体 OABC は次の 2 つの条件

（ｉ）OA⊥BC，　OB⊥CA，　OC⊥AB

（ii）4 つの面の面積がすべて等しい

をみたしている。このとき, この四面体は正四面体であることを示せ。

（京都大）

・我々の運命は, 神が決めるのではない。
　我々自身の想いが決めるのだ。

$\boxed{11}$

1 辺の長さが 1 の正三角形を底面とし高さが 2 の三角柱を考える。この三角柱を平面で切り, その断面が 3 辺とも三角柱の側面上にある直角三角形であるようにする。そのような直角三角形の面積の最小値を求めよ。

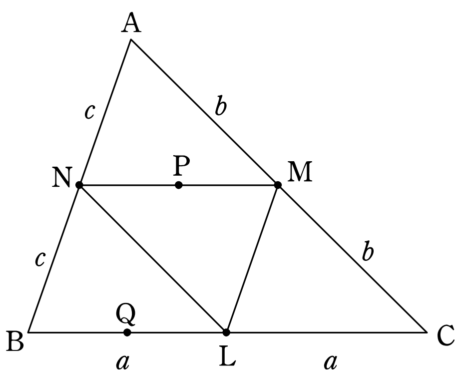
（東工大）

$\boxed{12}$

3 辺の長さが $\mathrm{BC}=2a$, $\mathrm{CA}=2b$, $\mathrm{AB}=2c$ であるような鋭角三角形 $\triangle\mathrm{ABC}$ の 3 辺 BC , CA , AB の中点をそれぞれ L , M , N とする。線分 LM , MN , NL に沿って三角形を折り曲げ, 四面体をつくる。その際, 線分 BL と CL , CM と AM , AN と BN はそれぞれ同一視されて, 長さが a , b , c の辺になるものとする。

(1) 線分 MN , BL の中点をそれぞれ P , Q とする。四面体を組み立てたとき, 空間内の線分 PQ の長さを求めよ。

(2) この四面体の体積を a , b , c を用いて表せ。



（東京大）

・成功したいなら簡単だ。
自分がやっていることを, 理解し, 惚れ込み, そして信じろ。