1. 微分法・積分法

$\boxed{1}$

a は 0 でない実数とする。関数

$$f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\frac{1}{a}\right)$$

の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ。

（東京大）

$\boxed{2}$

3 次関数 $f(x)=x^3-ax-b$ について, 次の問に答えよ。

(1) $a>0$ であるとき, $f(x)$ の極大値と極小値を求めよ。

(2) 次に（ⅰ）,（ⅱ）,（ⅲ）を示せ。

（ⅰ）$27b^2-4a^3>0$ のとき, 3 次方程式 $f(x)=0$ はただ 1 つの実数解をもつ。

（ⅱ）$27b^2-4a^3=0$ かつ $a>0$ のとき, 3 次方程式 $f(x)=0$ は異なる 2 つの実数解をもつ。

（ⅲ）$27b^2-4a^3<0$ のとき, 3 次方程式 $f(x)=0$ は異なる 3 つの実数解をもつ。

（早稲田大）

・旅を楽しみなさい。勝ち負けを心配するのはやめなさい。

$\boxed{3}$

放物線 $y=x^2$ 上の点 P と, 放物線 $y=-x^2-16x-65$ 上の点 Q に対して, 線分 PQ を考える。このとき, 線分 PQ の長さの最小値を求めよ。

（東工大）

$\boxed{4}$

(1) 3 次関数 $y=-x^3+ax^2+bx$ $(a>0)$ のグラフを C とする。原点を通る直線で, C とちょうど 2 点を共有するものを 2 本求めよ。

(2) (1) で求めた直線のうち, 傾きの大きい方を l_1, 小さい方を l_2 とする。C と l_1 が囲む部分の面積を S_1, C と l_2 が囲む部分の面積を S_2 とおく。この二つの面積の比 $S_1 : S_2$ を求めよ。

（東工大）

・絶対負けない方法を知ってるかい？
勝つまでやめないことだよ。

$\boxed{5}$

2 つの曲線 $y=x^3-16x$ と $y=-x^3-2x^2+a$ は x 座標が負の点を共有し, かつ, その点において共通の接線 l をもつとする。

(1) a を求めよ。

(2) l の方程式を求めよ。

(3) 2 つの曲線で囲まれた図形の面積を求めよ。

（東北大）

$\boxed{6}$

c を正の定数とし, $f(x)=x^3+3x^2$, $g(x)=x^3+3x^2+c$ とする。直線 l は点 $\mathrm{P}(p\,,\,f(p))$ で曲線 $y=f(x)$ と接し, 点 $\mathrm{Q}(q\,,\,g(q))$ で曲線 $y=g(x)$ と接する。

(1) c を p で表せ。

(2) 直線 l と曲線 $y=f(x)$ の P 以外の交点を R とする。2 つの線分の長さの比 PQ : QR を求めよ。

（一橋大）

・成功の 80 %は, その場に姿を現すことだ。

$\boxed{7}$

a を実数とする。

(1) 曲線 $y=\dfrac{8}{27}x^3$ と放物線 $y=(x+a)^2$ の両方に接する直線が x 軸以外に 2 本あるような a の範囲を求めよ。

(2) a が (1) の範囲にあるとき, この 2 本の接線と放物線 $y=(x+a)^2$ で囲まれた部分の面積 S を a を用いて表せ。

(東京大)

$\boxed{8}$

xy 平面上に放物線 $C:\ y=-3x^2+3$ と 2 点 $\mathrm{A}(1\,,0)\,,\mathrm{P}(0\,,3p)$ がある。線分 AP と C は, A とは異なる点 Q を共有している。

(1) 定数 p の存在する範囲を求めよ。

(2) S_1 を, C と線分 AQ で囲まれた領域とし, S_2 を C, 線分 QP, および y 軸とで囲まれた領域とする。S_1 と S_2 の面積の和が最小となる p の値を求めよ。

(一橋大)

・したことの後悔は日に日に小さくできる,
　していないことの後悔は日に日に大きくなる。

$\boxed{9}$

放物線 $y=ax^2$ $(a>0)$ と円 $(x-b)^2+(y-1)^2=1$ $(b>0)$ が点 $\mathrm{P}(p\,,\,q)$ で接しているとする。ただし, $0<p<b$ とする。この円の中心 Q から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点を R としたとき, $\angle\mathrm{PQR}=120^\circ$ であるとする。ここで, 放物線と円が点 P で接するとは, P が放物線と円の共有点であり, かつ点 P における放物線の接線と点 P における円の接線が一致することである。

(1) $a\,,\,b$ の値を求めよ。

(2) 点 P と点 R を結ぶ短い方の弧と x 軸, および放物線で囲まれた部分の面積を求めよ。

（名古屋大）

$\boxed{10}$

a を 0 以上の定数とする。関数 $y=x^3-3a^2x$ のグラフと方程式 $|x|+|y|=2$ で表される図形の共有点の個数を求めよ。

（一橋大）

・人生を左右する分かれ道を選ぶとき, 一番頼りになるのは,
自分がいつかは死ぬ身だと知っていることである。

$\boxed{11}$

a , b , c を実数とし, $a \neq 0$ とする。

2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ が次の条件（A）,（B）を満たすとする。

（A） $f(-1)=-1$, $f(1)=1$

（B） $-1 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x に対し, $f(x) \leqq 3x^2-1$

このとき, 積分 $I=\int_{-1}^{1}(f'(x))^2 dx$ の値のとりうる範囲を求めよ。

（東京大）

$\boxed{12}$

整式 $f(x)$ と実数 C が

$$\int_0^x f(y)dy+\int_0^1 (x+y)^2 f(y)dy=x^2+C$$

を満たすとき, この $f(x)$ と C を求めよ。

（京都大）

・トレンドや流行や世論に流されるような人間に
偉業は成し遂げられない。

2. 通過領域・予選決勝法・対称式

$\boxed{1}$

実数 t が $0 \leqq t \leqq 1$ を動くとき, 2 点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{2(t^2+t+1)}{3(t+1)}, -2\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{2t}{3}, -2t\right)$ を通る直線 AB の通りうる領域を図示せよ。

(東京大)

$\boxed{2}$

実数 t が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲で動くとき, xy 平面の直線

$$y=(3t^2-4)x-2t^3$$

が通る範囲を H とする。H の内, 直線 $x=1$ と $x=\dfrac{20}{9}$ ではさまれる部分の面積を求めよ。

(早稲田大)

・品格とは, 自分が誰であるかを知り, 何を言いたいかを把握し,
そして, 誰の目も気にしないことさ。

$\boxed{3}$

xy 平面上に円 $C: x^2+(y+2)^2=4$ がある。中心 $(a, 0)$, 半径 1 の円を D とする。C と D が異なる 2 点で交わるとき, 次の問いに答えよ。

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) C と D の 2 つの交点を通る直線の方程式を求めよ。

(3) a が (1) の範囲を動くとき, (2) の直線が通過する領域を図示せよ。

（横浜国立大）

$\boxed{4}$

座標平面の原点を O で表す。

線分 $y=\sqrt{3}x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点 P と, 線分 $y=-\sqrt{3}x$ $(-2 \leqq x \leqq 0)$ 上の点 Q が,
線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき, 線分 PQ の通過する領域を D とする。

(1) s を $0 \leqq s \leqq 2$ をみたす実数とするとき, 点 (s, t) が D に入るような t の範囲を求めよ。

(2) D を図示せよ。

（東京大）

・Stay hungry , stay foolish.

$\boxed{5}$

3 辺の長さが a と b と c の直方体を, 長さが b の 1 辺を回転軸として 90° 回転させるとき, 直方体が通過する点全体がつくる立体を V とする。

(1) V の体積を a , b , c を用いて表せ。

(2) $a+b+c=1$ のとき, V の体積のとりうる値の範囲を求めよ。

（東京大）

$\boxed{6}$

実数 x , y が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の範囲を求めよ。

（京都大）

・我が道に迷う方が, 人の道を正しく進むより, ずっといいことである。

$\boxed{7}$

$k>0$ とする。xy 平面上の二曲線 $y=k(x-x^3)$, $x=k(y-y^3)$ が第 1 象限に $\alpha \neq \beta$ なる交点 (α , β) をもつような k の範囲を求めよ。

（東京大）

・我々はみな, 生活するために生まれてきたのではない。
　冒険するために生まれてきたのだ。