１．２次関数・領域・軌跡

$\boxed{1}$

a を実数の定数とする。放物線 $y=x^2-ax+a$ が x 軸の

$$1 \leqq x \leqq 2 \quad \text{または} \quad 3 \leqq x \leqq 4$$

を満たす部分と 2 つの異なる共有点を持つための a の条件を求めよ。

（千葉大）

$\boxed{2}$

a を実数とする。2 次関数

$$f(x)=x^2-ax+1$$

の区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値を $M(a)$, 最小値を $m(a)$ と表す。

(1) 2 つの関数 $b=M(a)$ と $b=m(a)$ のグラフをかけ。

(2) b を実数とする。2 次方程式

$$x^2-ax+1-b=0$$

が区間 $0 \leqq x \leqq 1$ において少なくとも 1 つの解を持つような点 $(a\,,b)$ 全体の集合を, (1) を用いて斜線で図示せよ。

（慶応大）

・常に準備を怠るな。チャンスはいずれ, 訪れる。

$\boxed{3}$

xy 平面上の原点と点 $(1, 2)$ を結ぶ線分 (両端を含む) を L とする。曲線 $y=x^2+ax+b$ が L と共有点を持つような実数の組 (a, b) の集合を ab 平面上に図示せよ。

(京都大)

$\boxed{4}$

実数 a に対し, 不等式 $y \leqq 2ax-a^2+2a+2$ の表す座標平面上の領域を $D(a)$ とおく。

(1) $-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすすべての a に対し $D(a)$ の点となるような点 (p, q) の範囲を図示せよ。

(2) $-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすいずれかの a に対し $D(a)$ の点となるような点 (p, q) の範囲を図示せよ。

(東北大)

・できると思えばできるし, できないと思えばできない。
どちらにしても, 本人次第だ。

$\boxed{5}$

放物線 $y=x^2$ 上に, 直線 $y=ax+1$ に関して対称な位置にある異なる 2 点 P, Q が存在するような a の値の範囲を求めよ。

（一橋大）

$\boxed{6}$

実数 x, y が $x^2+y^2\leqq 1$ を満たしながら変化するとする。

(1) $s=x+y$, $t=xy$ とするとき, 点 (s, t) の動く範囲を st 平面上に図示せよ。

(2) 負でない定数 $m\geqq 0$ をとるとき, $xy+m(x+y)$ の最大値, 最小値を m を用いて表せ。

（東工大）

・決断しないことは, 時として, 間違った行動をとるよりもタチが悪い。

$\boxed{7}$

実数 x , y が不等式 $x^2+y^2-1\leqq 0$ を満たすとき $\dfrac{x+y+2}{x-y+2}$ の最大値と最小値を求めよ。

（早稲田大）

$\boxed{8}$

a は正の定数とする。点 $(x\,,\,y)$ は条件 $a|x|+|y|\leqq a$ を満たす。

(1) $y-(x+1)^2$ の最小値を求めよ。

(2) $y-(x+1)^2$ の最大値を求めよ。

（一橋大）

・計画のない目標は, ただの願いごとにすぎない。

$\boxed{9}$

$a>0$ とし, x , y が 4 つの不等式 $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $2x+3y \leqq 12$, $ax+\left(4-\dfrac{3}{2}a\right)y \leqq 8$ を同時に満たしているとする。このとき, $x+y$ の最大値 $f(a)$ を求めよ。

（東工大）

$\boxed{10}$

座標平面上の 1 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$ をとる。放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{Q}(\alpha, \alpha^2)$, $\mathrm{R}(\beta, \beta^2)$ を, 3 点 P , Q , R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき, △PQR の重心 $\mathrm{G}(X, Y)$ の軌跡を求めよ。

（東京大）

・幸せな人は誰でも, 他の人まで, 幸せにするものである。

$\boxed{11}$

放物線 $y=x^2$ 上の相異なる 3 点 P , Q , R は△PQR が正三角形になるように動いている。

(1) P , Q , R の x 座標を p , q , r とするとき, $p^2+q^2+r^2$ を $pq+qr+rp$ のみで表せ。

(2) △PQR の重心はある 1 つの放物線上にあることを示せ。

（大阪大）

$\boxed{12}$

xy 平面上の円 $x^2+y^2=1$ へ, この円の外部の点 P(a , b) から 2 本の接線を引き, その接点を A , B とし, 線分 AB の中点を Q とする。

(1) 点 Q の座標を a , b を用いて表せ。

(2) 点 P が円 $(x-3)^2+y^2=1$ の上を動くとき, 点 Q の軌跡を求めよ。

（北海道大）

・人間は, その人の受け答えではなく,
　その人が発する問いによって判断すべきだ。

２. 高次方程式

$\boxed{1}$

a , b は実数であり, 方程式 $x^4+(a+2)x^3-(2a+2)x^2+(b+1)x+a^3=0$ が解 $x=1+i$ をもつとする。ただし, $i=\sqrt{-1}$ とする。このとき a , b を求めよ。また, このときの方程式の他の解も求めよ。

（東北大）

$\boxed{2}$

m を整数とし, $f(x)=x^3+8x^2+mx+60$ とする。

(1) 整数 a と, 0 ではない整数 b で, $f(a+bi)=0$ をみたすものが存在するような m をすべて求めよ。ただし, i は虚数単位である。

(2) (1) で求めたすべての m に対して, 方程式 $f(x)=0$ を解け。

（一橋大）

・大切なのは, 自分がどこにいるのかではなく,
どの方向へ向かっているか, である。

$\boxed{3}$

多項式 $(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ は多項式 x^2+x+1 で割り切れるか。

（京都大）

$\boxed{4}$

k は整数であり, 3 次方程式

$$x^3-13x+k=0$$

は 3 つの異なる整数解をもつ。k とこれらの整数解をすべて求めよ。

（一橋大）

・忠告を受け入れられる者は, 忠告を与える者よりも優れている。

３. 図形と方程式

1

放物線 $y=x^2$ 上の動点 P は, 点 A$(1\,,1)$ と点 B$\left(-\dfrac{1}{2}\,,\dfrac{1}{4}\right)$ との間を動く。

(1) △APB の面積が最大になるときの P の x 座標を求めよ。

(2) ∠APB の大きさが最小になるときの P の x 座標を求めよ。

（一橋大）

2

実数 t は $0<t<1$ を満たすとし, 座標平面上の 4 点 O$(0\,,0)$, A$(0\,,1)$, B$(1\,,0)$, C$(t\,,0)$ を考える。また線分 AB 上の点 D を∠ACO＝∠BCD となるように定める。t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ。

（東京大）

・賢い者はチャンスを見つけるよりも,
自ら多くのチャンスを創りだす。

$\boxed{3}$

定数 k は $k>1$ をみたすとする。xy 平面上の点 $\mathrm{A}(1\,,0)$ を通り x 軸に垂直な直線の第 1 象限に含まれる部分を, 2 点 X , Y が $\mathrm{AY}=k\mathrm{AX}$ をみたしながら動いている。原点 $\mathrm{O}(0\,,0)$ を中心とする半径 1 の円と線分 OX , OY が交わる点をそれぞれ P , Q とするとき, △OPQ の面積の最大値を k を用いて表せ。

（東工大）

$\boxed{4}$

2 つの円 $(x-a)^2+(y-b)^2=2$ ……①, $x^2+y^2=9$ ……② がある。円①は 2 点 $\mathrm{P}(1\,,2)$, $\mathrm{Q}(3\,,2)$ を通り, x 軸と交わるとする。このとき

(1) $a\,,b$ の値を求めよ。

(2) 2 つの円①, ②の交点を $\mathrm{R}(X_1\,,Y_1)$, $\mathrm{S}(X_2\,,Y_2)$ (ただし, $X_1 \leqq X_2$) とするとき, $X_1\,,X_2$ の値を求めよ。また, 線分 RS の長さを求めよ。

(3) 2 つの円①, ②の交点を通る円のうち, 円①と異なるものの方程式は定数 k $(k \fallingdotseq -1)$ を用いて

$$x^2+y^2-9+k(x^2+y^2-\boxed{}x-\boxed{}y+\boxed{})=0 \text{ ……③}$$

とかける。円③が円①と直交するのは $k=\boxed{}$ のときであり, このとき, 円③の中心の座標は $\boxed{}$, 半径は $\boxed{}$ である。ただし, 2 円が直交するとは, その交点におけるおのおのの接線が直交することである。

（近畿大）

・自らよく考え, 実際に経験することでしか,
学ぶ喜びは感じられない。