1．極限の応用

$\boxed{1}$

関数 $f(x)=4x-x^2$ に対し，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=c\,,\quad a_{n+1}=\sqrt{f(a_n)}\quad (n=1\,,2\,,3\,,\cdots)$$

で与える。ただし，c は $0<c<2$ を満たす定数である。

(1) $a_n<2$ ，$a_n<a_{n+1}$ $(n=1\,,2\,,3\,,\cdots)$ を示せ。

(2) $2-a_{n+1}<\dfrac{2-c}{2}(2-a_n)$ $(n=1\,,2\,,3\,,\cdots)$ を示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

（東北大）

$\boxed{2}$

一般項が $a_n=\dfrac{1+2^2+3^3+\cdots\cdots+n^n}{(n+1)^n}$ $(n\geqq 1)$ で表される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1) 不等式 $a_n<1$ を示せ。

(2) a_{n+1} を n と a_n を用いて表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

（富山大）

・何かを成し遂げる上で，最も身につけるべきものは，
立ち直る能力である。

$\boxed{3}$

$n=1,2,\cdots$ に対して x の整式

$$P_n(x)=x^3-nx^2-(2n+12)x-8$$

を考える。以下の問に答えよ。

(1) 3 次方程式 $P_n(x)=0$ の正の実数解はただ 1 つであることを示せ。

(2) t が $P_n(x)=0$ の解であるとき, $P_n\left(-\dfrac{4}{t+2}\right)$ を求めよ。

(3) $P_n(x)=0$ の正の実数解を α_n とするとき, $P_n(x)=0$ の最小の実数解 β_n を α_n で表せ。
さらに $\lim_{n\to\infty}\beta_n$ を求めよ。

（早稲田大）

$\boxed{4}$

n は 2 以上の自然数とする。関数

$$y=e^x \quad \cdots\cdots(ア)$$
$$y=e^{nx}-1 \quad \cdots\cdots(イ)$$

について以下の問いに答えよ。

(1) (ア) と (イ) のグラフは第 1 象限においてただひとつの交点を持つことを示せ。

(2) (1) で得られた交点の座標を (a_n, b_n) としたとき

$$\lim_{n\to\infty}a_n \quad と \quad \lim_{n\to\infty}na_n$$

を求めよ。

(3) 第 1 象限内で (ア) と (イ) のグラフおよび y 軸で囲まれた部分の面積を S_n とおく。
このとき

$$\lim_{n\to\infty}nS_n$$

を求めよ。

（東工大）

・ほとんどの人は, 後のことを考えて, 力を１％以上残してしまっている。しかし, チャンピオンになる人は, 最後の１％をも躊躇なく使い切る。

$\boxed{5}$

$x \neq 1$ に対して, $f_1(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ とおく。

$f_{n+1}(x)=xf_n(x)+n+1\ \ (n \geqq 1)$ によって, $f_n(x)$ を定義する。

このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f_n\left(e^{\frac{1}{n}}\right)}{n^2}$ を求めよ。

（大阪大）

$\boxed{6}$

$a_1=\dfrac{1}{2}$ とし, 数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{(1+a_n)^2} \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

によって定める。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 各 $n=1,2,3,\cdots$ に対し $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおく。

$n>1$ のとき, $b_n>2n$ となることを示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n$ を求めよ。

（東京大）

・ 1時間の浪費を何とも思わない人は,
人生の価値をまだ発見していない。

$\boxed{7}$

座標平面の点 (x, y) を $(3x+y, -2x)$ へ移す移動 f を考え, 点 P が移る行き先を $f(\mathrm{P})$ と表す。f を用いて直線 $l_0, l_1, l_2, \cdots$ を以下のように定める。

- l_0 は直線 $3x+2y=1$ である。
- 点 P が l_n 上を動くとき, $f(\mathrm{P})$ が描く直線を l_{n+1} とする $(n=0, 1, 2, \cdots)$。

以下 l_n を 1 次式を用いて $a_n x+b_n y=1$ と表す。

(1) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n で表せ。

(2) 不等式 $a_n x+b_n y>1$ が定める領域を D_n とする。$D_0, D_1, D_2, \cdots$ すべてに含まれるような点の範囲を図示せよ。

（東京大）

$\boxed{8}$

xy 平面上で原点から傾き a $(a>0)$ で出発し折れ線状に動く点 P を考える。ただし, 点 P の y 座標はつねに増加し, その値が整数になるごとに動く方向の傾きが s 倍 $(s>0)$ に変化するものとする。

P の描く折れ線が直線 $x=b$ $(b>0)$ を横切るための a, b, s に関する条件を求めよ。

（東京大）

・「どんな努力をしているか」と尋ねられて,
たじろがずに答えられる人は, 成功者の門に立っている。

$\boxed{9}$

xy 平面において, 直線 $x=0$ を L とし, 曲線 $y=\log x$ を C とする。さらに, L 上, または C 上, または L と C との間にはさまれた部分にある点全体の集合を A とする。
A に含まれ, 直線 L に接し, かつ曲線 C と点 $(t\,,\,\log t)$ $(0<t)$ において共通の接線をもつ円の中心を P_t とする。
P_t の x 座標, y 座標を t の関数として

$$x=f(t)\ ,\ \ y=g(t)$$

と表したとき, 次の極限値はどのような数となるか。

(1) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{g(t)}$

(2) $\displaystyle\lim_{t\to +\infty}\frac{f(t)}{g(t)}$

（東京大）

$\boxed{10}$

半径 1 の円に内接する正 $2n$ 角形の形をした囲いがある。一匹の山羊が囲いの周の半分の長さのひもで囲いの 1 つのかどにつながれている。この山羊が囲いの外で動き得る範囲の面積を S_{2n} とする。

(1) S_{2n} を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n}$ を求めよ。

（津田塾大）

・努力しても勝者になるとは限らない。
　しかし, 勝者は例外なく必ず努力している。

２. 微分法の応用

$\boxed{1}$

a , b を正の実数とする。

(1) 区間 $a<x$ における関数 $f(x)=\dfrac{x^4}{(x-a)^3}$ の増減を調べよ。

(2) 区間 $a<x$ における関数 $g(x)=\dfrac{1}{(x-a)^2}-\dfrac{b}{x^3}$ のグラフと相異なる 3 点で交わる x 軸に平行な直線が存在するための必要十分条件を求めよ。

（東工大）

$\boxed{2}$

$x>0$ に対し $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とする。

(1) $n=1, 2, \cdots$ に対し $f(x)$ の第 n 次導関数は, 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を用いて

$$f^{(n)}(x)=\frac{a_n+b_n\log x}{x^{n+1}}$$

と表されることを示し, a_n , b_n に関する漸化式を求めよ。

(2) $h_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ とおく。h_n を用いて a_n , b_n の一般項を求めよ。

（東京大）

・気持ちが萎え, ときには涙することもあるだろう。
だが, 恥じることはない。
その涙は苦しむ勇気を持っていることの証だからだ。

$\boxed{3}$

空間内にある一辺の長さが1の正三角形ABCで, Aの座標が$(0, 0, 1)$であり, BとCのz座標が等しいものを考える。点$\mathrm{L}(0, 0, 1+\sqrt{2})$にある光源が$xy$平面上に作るこの正三角形の影の部分の面積の最大値を求めよ。

（東工大）

$\boxed{4}$

(1) 実数xが$-1<x<1, x \neq 0$をみたすとき, 次の不等式を示せ。

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(2) 次の不等式を示せ。

$$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$$

（東京大）

・人生の最大の喜びは,

「あなたにはできない」と言われたことを成し遂げることだ。

3．平均値の定理

$\boxed{1}$

次の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{\log(n+1)}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(\log n)^2\left\{\sin\left(\frac{1}{\log n}\right)-\sin\left(\frac{1}{\log(n+1)}\right)\right\}$

（富山大）

$\boxed{2}$

$a_1=0$, $a_{n+1}=\log(a_n+e)$ （$n=1$, 2 , 3 , ……）で定まる数列 $\{a_n\}$ の収束について調べたい。以下の問いに答えなさい。

(1) 方程式 $x=\log(x+e)$ は $x>0$ の範囲でただ1つの実数解 β をもつことを証明しなさい。

(2) すべての自然数 n について $0\leqq a_n<\beta$ が成り立つことを証明しなさい。

(3) $0<a<b$ のとき $\log b-\log a<\dfrac{b-a}{a}$ が成り立つことを証明しなさい。

(4) すべての自然数 n について $\beta-a_{n+1}<\dfrac{1}{e}(\beta-a_n)$ が成り立つことを証明し, これを用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\beta$ を示しなさい。

（慶応大）

・一歩踏み出せるなら, もう一歩踏み出せる。

$\boxed{3}$

a を定数, n を自然数とし

$$I_n=\int_a^{a+\frac{1}{n}} x\cos^2(x-a)\,dx$$

とする。$\lim_{n\to\infty} nI_n$ を求めよ。

（早稲田大）

$\boxed{4}$

曲線 $y=\sin x$ の $0\leqq x\leqq \pi$ の部分が x 軸との間に囲む図形を x 軸のまわりに回転させてできる立体を考える。この立体を x 軸に垂直な $2n-1$ 個の平面によって $2n$ 個の部分に分割し, 分割されたおのおのの部分の体積が等しいようにする。

これらの平面が x 軸と交わる点の x 座標のうち, $\dfrac{\pi}{2}$ より小さくて $\dfrac{\pi}{2}$ に一番近いものを a_n とするとき, $\lim_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\pi}{2}-a_n\right)$ を求めよ。

（大阪大）

・成功（success）が努力（work）より先に来るのは
辞書の中だけである。

4．定積分の応用

$\boxed{1}$

曲線 $y=x+\sin x$ と曲線 $x=y+\sin y$ の第 1 象限の部分を考える。

(1) 第 1 象限にあるこの 2 曲線の交点のうち原点 O に最も近い交点 P の座標は

$(\boxed{\text{シ}}\pi\,,\boxed{\text{ス}}\pi)$ である。

(2) この 2 曲線の O , P の間にある部分で囲まれる図形の面積は $\boxed{\text{セ}}$ である。

(3) 第 1 象限にあるこの 2 曲線の交点のうち原点 O に 2 番目に近い交点 Q の座標は

$(\boxed{\text{ソ}}\pi\,,\boxed{\text{タ}}\pi)$ である。

(4) 曲線 $y=x+\sin x$, x 軸および点 Q から x 軸に下ろした垂線で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積は

$$\left(\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\pi^{\boxed{\text{テ}}}+\boxed{\text{ト}}\right)\pi^2$$

である。

（上智大）

$\boxed{2}$

$x>0$ を定義域とする関数 $f(x)=\dfrac{12(e^{3x}-3e^{x})}{e^{2x}-1}$ について, 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=f(x)$ $(x>0)$ は, 実数全体を定義域とする逆関数を持つことを示せ。すなわち, 任意の実数 a に対して, $f(x)=a$ となる $x>0$ がただ 1 つ存在することを示せ。

(2) 前問 (1) で定められた逆関数を $y=g(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ とする。

このとき, 定積分 $\displaystyle\int_8^{27} g(x)dx$ を求めよ。

（東京大）

・意志は才能不足を補うが, 才能は意志不足を補わない。

$\boxed{3}$

O を原点とする座標平面上の曲線

$$C : y=\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+2}$$

と, その上の相異なる 2 点 $\mathrm{P}_1(x_1\,,\,y_1)$, $\mathrm{P}_2(x_2\,,\,y_2)$ を考える。

(1) P_i $(i=1\,,2)$ を通る x 軸に平行な直線と, 直線 $y=x$ との交点を, それぞれ H_i $(i=1\,,2)$ とする。このとき$\triangle\mathrm{OP_1H_1}$ と $\triangle\mathrm{OP_2H_2}$ の面積は等しいことを示せ。

(2) $x_1<x_2$ とする。このとき C の $x_1\leqq x\leqq x_2$ の範囲にある部分と, 線分 $\mathrm{P_1O}$, $\mathrm{P_2O}$ とで囲まれる図形の面積を y_1 , y_2 を用いて表せ。

（東京大）

$\boxed{4}$

n , m を 0 以上の整数とし, $I_{n,m}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\sin^m\theta\,d\theta$ とおく。

(1) $n\geqq 2$ のとき, $I_{n,m}$ を $I_{n-2,m+2}$ を用いて表せ。

(2) $I_{2n+1,2m+1}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^m dx$ を示せ。

(3) $\dfrac{n\,!\,m\,!}{(n+m+1)!}=\dfrac{{}_m C_0}{n+1}-\dfrac{{}_m C_1}{n+2}+\cdots\cdots+(-1)^m\dfrac{{}_m C_m}{n+m+1}$ を示せ。
ただし $0!=1$ とする。

（千葉大）

・涙の出ない受験生になるな。それが, 嬉し涙でも, 悔し涙でも。

$\boxed{5}$

L を正定数とする。座標平面の x 軸上の正の部分にある点 $\mathrm{P}(t, 0)$ に対し, 原点 O を中心とし点 P を通る円周上を, P から出発して反時計回りに道のり L だけ進んだ点を $\mathrm{Q}(u(t), v(t))$ と表す。

(1) $u(t), v(t)$ を求めよ。

(2) $0<a<1$ の範囲の実数 a に対し, 積分

$$f(a)=\int_a^1 \sqrt{\{u'(t)\}^2+\{v'(t)\}^2}\,dt$$

を求めよ。

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{f(a)}{\log a}$ を求めよ。

（東京大）

$\boxed{6}$

実数 $p>0$ に対して,

$$f(x)=e^{(p+1)x}-e^{x}$$

とおく。以下の問に答えよ。

(1) $f(x)$ が最小となる x の値 s_p を求め, $y=f(x)$ のグラフを描け。

(2) $g(t)=\displaystyle\int_t^{t+1} f(x)e^{t-x}\,dx$

とおく。$g(t)$ が最小となる t の値 t_p を求めよ。

(3) $0<p\leqq 1$ のとき,

$$1+\frac{p}{2}\leqq\frac{e^p-1}{p}\leqq 1+\frac{p}{2}+p^2$$

が成立することを用いて, 右側からの極限 $\displaystyle\lim_{p\to+0}(t_p-s_p)$ を求めよ。

（早稲田大）

・今日という日は, 残りの人生の最初の一日。

$\boxed{7}$

関数 $f(x)$ を次の積分で定義する。

$$f(x)=\int_{x}^{x+\log 2}|e^{2t}-e^{t}-2|\,dt$$

次の問に答えよ。

(1) $g(t)=e^{2t}-e^{t}-2$ のグラフを描け。

(2) $f(x)$ を求めよ。

(3) $f(x)$ が極値をとる x を求めよ。

（早稲田大）

$\boxed{8}$

$0\leqq x\leqq \pi$ に対して, 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos|t-x|}{1+\sin|t-x|}\,dt$$

と定める。$f(x)$ の $0\leqq x\leqq \pi$ における最大値と最小値を求めよ。

（東北大）

・問題が大きければ大きいほど, チャンスも大きい。

５．区分求積法

1

数列 $a_n=\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{{}_{2n}P_n}$　$(n=1,2,3,\cdots\cdots)$ の極限値は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\boxed{}$ である。

数列 $b_n=\dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{{}_{4n}P_{2n}}$　$(n=1,2,3,\cdots\cdots)$ の極限値は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\boxed{}$ である。

数列 $c_n=\sqrt[n]{\dfrac{{}_{8n}P_{4n}}{{}_{6n}P_{4n}}}$　$(n=1,2,3,\cdots\cdots)$ の極限値は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=\boxed{}$ である。

ただし, ${}_mP_r=\dfrac{m\,!}{(m-r)!}$ である。また, 記号 $\sqrt[n]{}$ は n 乗根を表す。

（東京理科大）

2

$f(x)=x\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}$, $g(x)=\log(1+x^2)$　(x は実数) とおく。ただし, $\log x$ は x の自然対数を表す。

(1) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ の値を求めよ。

(2) $x>0$ のとき $f(x)>g(x)$ であることを証明せよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(k^2+n^2)\right)-2\log n\right\}$ の値を求めよ。

（千葉大）

・万策尽きたと思うな。自ら断崖絶壁のふちに立て。
　そのときはじめて新たな風が必ず吹く。

$\boxed{3}$

n 個のボールを $2n$ 個の箱へ投げ入れる。各ボールはいずれかの箱に入るものとし，どの箱に入る確率も等しいとする。どの箱にも 1 個以下のボールしか入っていない確率を p_n とする。このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{n}$ を求めよ。

（京都大）

・不安だから行動できないのではない。
　行動しないから不安になるのだ。

６. 関数方程式・パラメーター

1

$f(x)+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(y)\sin(x-y)\,dy=x+1$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

（京都大）

2

微分可能な関数 $f(x)$, $g(x)$ が次の 4 条件を満たしている。

(a) 任意の正の実数 x について $f(x)>0$, $g(x)>0$

(b) 任意の実数 x について $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$

(c) 任意の実数 x, y について $f(x+y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$

(d) $\lim_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=2$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $f(0)$ および $g(0)$ を求めよ。

(2) $\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2$ を求めよ。

(3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-f(x)}{x^2}$ を求めよ。

(4) $f(x)$ の導関数を $g(x)$ を用いて表せ。

(5) 曲線 $y=f(x)g(x)$, 直線 $x=a$ $(a>0)$ および x 軸で囲まれる図形の面積が 1 のとき $f(a)$ の値を求めよ。

（東京医科歯科大）

・絶対に成功すると思い続けた者だけが成功するし，
思い続けられれば，それだけで成功者だ。

$\boxed{3}$

2 つの関数を

$$x(t)=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\ ,\ y(t)=t^2-2\log t$$

で定める。実数 t が $t>0$ の範囲を動くとき, 点 $(x(t)\ ,\ y(t))$ が xy 平面上に描く曲線を C とする。

(1) $t>1$ のとき $y(t)>y\left(\frac{1}{t}\right)$ であることを示せ。

(2) s を 1 以上の実数とする。直線 $x=\frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)$ と曲線 C の共有点の個数を求めよ。

(3) a を 1 より大きい実数とする。直線 $x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ と曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ。

（大阪大）

$\boxed{4}$

点 $(x\ ,\ y)$ を点 $(x+a\ ,\ y+b)$ にうつす平行移動によって曲線 $y=x^2$ を移動して得られる曲線を C とする。C と曲線 $y=\frac{1}{x}\ ,\ x>0$ が接するような $a\ ,\ b$ を座標とする点 $(a\ ,\ b)$ の存在する範囲の概形を図示せよ。また, この 2 曲線が接する点以外に共有点をもたないような $a\ ,\ b$ の値を求めよ。ただし, 2 曲線がある点で接するとは, その点で共通の接線をもつことである。

（東京大）

・満足した奴に未来はない。
　悔しいと思った奴にだけ, 本当の未来がくる。

7. 定積分と不等式

$\boxed{1}$

(1) 自然数 n に対して $R_n(x)=\dfrac{1}{1+x}-\{1-x+x^2-\cdots\cdots+(-1)^n x^n\}$ とするとき，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 R_n(x)dx$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 R_n(x^2)dx$ を求めよ。

(2) (1) を利用して，次の無限級数の和を求めよ。

（ア）$1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots\cdots$

（イ）$1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots\cdots$

（札幌医科大）

$\boxed{2}$

自然数 n に対し

$$S_n=\int_0^1\frac{1-(-x)^n}{1+x}dx$$

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$$

とおく。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) 次の不等式を示せ。

$$\left|S_n-\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\right|\leqq\frac{1}{n+1}$$

(2) T_n-2S_n を n を用いて表せ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n$ を求めよ。

（東京医科歯科大）

・失敗？　これはうまくいかないことを確認した成功だよ。

$\boxed{3}$

以下の問いに答えよ。

(1) $0<x<a$ を満たす実数 x , a に対し, 次を示せ。

$$\frac{2x}{a}<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$$

(2) (1) を利用して, 次を示せ。

$$0.68<\log 2<0.71$$

ただし, $\log 2$ は 2 の自然対数を表す。

（東京大）

$\boxed{4}$

次の条件 (i) , (ii) , (iii) を満たす関数 $f(x)$ $(x>0)$ を考える。

(i) $f(1)=0$

(ii) 導関数 $f'(x)$ が存在し, $f'(x)>0$ $(x>0)$

(iii) 第 2 次導関数 $f''(x)$ が存在し, $f''(x)<0$ $(x>0)$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $a\geqq\frac{3}{2}$ のとき, 次の 3 つの数の大小を比較せよ。

$$f(a)\ ,\quad \frac{1}{2}\left\{f\left(a-\frac{1}{2}\right)+f\left(a+\frac{1}{2}\right)\right\}\ ,\quad \int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}}f(x)dx$$

(2) 整数 n $(n\geqq 2)$ に対して, 次の不等式が成立することを示せ。

$$\int_{\frac{3}{2}}^{n}f(x)dx<\sum_{k=1}^{n-1}f(k)+\frac{1}{2}f(n)<\int_{1}^{n}f(x)dx$$

(3) 次の極限値を求めよ。ただし, log は自然対数を表す。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+\log n!-\log n^{n}}{\log n}$$

（東京医科歯科大）

・まずまずの人生をこのまま送るか？
　二度とない人生を求め続けるか？

８. 体積・表面積の応用

$\boxed{1}$

底面の半径が a で高さが b の直円柱 A を考える。この直円柱 A を座標空間内の 2 つの平面 $z=0$ と $z=b$ との間に, その中心軸が z 軸となるようにおく。また x 軸と点$(0\,,\,a\,,\,b)$ を含む平面を P とする。平面 P で, この直円柱 A を切ってできる 2 つの立体のうちで, 点 $\left(0\,,\,\dfrac{a}{2}\,,\,\dfrac{b}{4}\right)$ を含む方の立体を B とする。t を条件 $0 \leqq t \leqq a$ をみたす実数とするとき, この立体 B を平面 $y=t$ で切ったときの切り口の面積 $S(t)$ は $\boxed{\text{ア}}$ である。したがって, 立体 B の体積 $V=\displaystyle\int_0^a S(t)dt$ は $\boxed{\text{イ}}$ となる。

さらに, この立体 B の側面（つまり, もともとは直円柱 A の側面であった部分）の面積 S_1 は $\boxed{\text{ウ}}$ である。立体 B の底面（すなわち, 平面 $z=0$ の部分）の面積を S_2 とする。ここで, $S_1+S_2=3\pi$ （π は円周率）の条件のもとで, a と b を動かして立体 B の体積 V を最大にするには, $a=\boxed{\text{エ}}$, $b=\boxed{\text{オ}}$ と定めればよい。

（慶応大）

$\boxed{2}$

次の各問いに答えよ。

(1) 平面上に一辺の長さが 4 の正三角形がある。r を 1 以下の正の実数とし, 半径 r の円の中心が, 平面内でこの正三角形の辺上を一周するとき, この円が通過する部分の面積を求めよ。

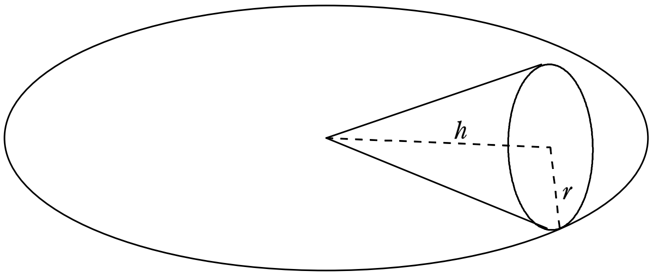
(2) 空間に一辺の長さが 4 の正三角形があり, 半径 1 の球の中心がこの三角形の周上を一周するとき, この球が通過する部分の体積を求めよ。

（横浜国立大）

・挑戦する奴にしか, チャンスはやってこない

$\boxed{3}$

半径 r, 高さ $h\,(>r)$ の直円錐を, 頂点を固定して平面上を図のようにすべることなくころがす。円錐の中心軸が一周してもとの位置にもどるとき, 円錐が通過する部分の体積を求めよ。



（東京電機大）

$\boxed{4}$

一辺の長さが 1 の立方体を, 中心を通る対角線のうちの一本を軸として回転させたとき, この立方体が通過する部分の体積を求めよ。

（東工大）

・受験勉強が苦しいと感じるときは, これほど勉強できる環境を
　誰が用意してくれたのかを考えるとよい。
　あなたは勉強できることのありがたさを知るだろう。