１．２次曲線

$\boxed{1}$

座標平面上に原点を中心とする半径 3 の円 A と, 点 $(-1, 0)$ を中心とする半径 1 の円 B がある。円 A に内接し, 円 B と外接する円の中心が描く軌跡を求めよ。

（早稲田大）

$\boxed{2}$

2 つの円 $C_1 : x^2+y^2=1$, $C_2 : (x-3)^2+y^2=4$ に外接する半径 $r\,(r>0)$ の円の中心を P とする。r を動かすとき, 点 P の描く軌跡が満たす方程式を求めよ。

（名古屋大）

・まだ芽が出ないからといって, 自分を信じることをやめてはいけない。

$\boxed{3}$

(1) 点$(3\,,0)$を通り，円$(x+3)^2+y^2=4$と互いに外接する円の中心$(X\,,Y)$の軌跡を求めよ。

(2) (1) の軌跡上の点と定点$(0\,,a)$との距離の最小値を求めよ。

（筑波大）

$\boxed{4}$

一辺の長さが 4 の正三角形 ABC において，辺 BC の中点を D，線分 BD の中点を E とする。また，2 点 B，D からの距離の和が 3 である点を F とする。点 F はこの条件

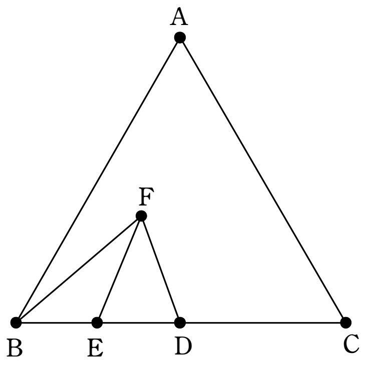
$$\mathrm{BF}+\mathrm{DF}=3$$

を満たしながら動く。このとき，次のことが成り立つ。

(a) 線分 EF の長さの最大値は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ であり，最小値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}}$ である。

(b) △BFC の面積の最大値は $\sqrt{\boxed{オ}}$ である。

(c) 点 F と直線 AC の距離が最小となるとき，線分 EF の長さは $\dfrac{\sqrt{\boxed{カ}\boxed{キ}\boxed{ク}}}{\boxed{ケ}}$ である。



（東京理科大）

・何も咲かない寒い日は，下へ下へと根を伸ばせ。
やがて大きな花が咲く。

$\boxed{5}$

放物線 C : $y=x^2$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{P}(t, t^2)$, $\mathrm{Q}(s, s^2)$ $(s<t)$ における接線の交点を $\mathrm{R}(X, Y)$ とする。

(1) X, Y を t, s を用いて表せ。

(2) 点 P, Q が $\angle\mathrm{PRQ}=\dfrac{\pi}{4}$ を満たしながら C 上を動くとき, 点 R は双曲線上を動くことを示し, かつ, その双曲線の方程式を求めよ。

(筑波大)

$\boxed{6}$

xy 平面上の原点を O とし, 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ を E とする。E 上の点 $\mathrm{P}(s, t)$ における E の法線と x 軸との交点を Q とする。点 P が $s>0$, $t>0$ の範囲を動くとき, $\angle\mathrm{OPQ}$ が最大になる点 P を求めよ。

(早稲田大)

・負けても終わりではない。やめたら終わりだ。

$\boxed{7}$

2 つの双曲線

$C: x^2 - y^2 = 1$

$D: x^2 - y^2 = -1$

を考える。C 上の点 $\mathrm{P}(a, b)$ $(a>0)$ に対して, C の P における接線と D との 2 交点を Q , Q′とする。そして, D の Q における接線と D の Q′ における接線との交点を R とする。このように点 P に対して点 R を対応させる。点 P が C の $x>0$ の部分を動くとき, 点 R の軌跡を求めよ。

（早稲田大）

$\boxed{8}$

連立不等式

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + y^2 \leqq 1 \\ \left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)x + y \leqq 1 \end{cases}$$

の表す領域の面積を求めよ。

（早稲田大）

・夜がどんなに長くても, 必ず夜明けはやってくる。

$\boxed{9}$

長軸, 短軸の長さがそれぞれ 4 , 2 である楕円に囲まれた領域を A とし, この楕円の短軸の方向に, A を $\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ だけ平行移動してできる領域を B とする。このとき A と B の共通部分 $C = A \cap B$ の面積 M を求めよ。
ただし

$$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) = \cos\frac{\pi}{12}$$

である。

（注）方程式 $\quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0\ ,\ b>0)$

で表される楕円において, $2a$, $2b$ の内大きい方を長軸の長さといい, 他方を短軸の長さという。

（東京大）

$\boxed{10}$

楕円 $\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{y^2}{8}=1$ の外部の点 $\mathrm{P}(a\ ,\ b)$ からひいた 2 本の接線が直交するような点 P の軌跡を求めよ。

（東工大）

・決心する前に完全な見通しをつけようとする者は,
決心することができない。

$\boxed{11}$

楕円 $C：\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ の, 直線 $y=mx$ と平行な 2 接線を l_1 , $l_1{}'$ とし, l_1 , $l_1{}'$ に直交する C の 2 接線を l_2 , $l_2{}'$ とする。

(1) l_1 , $l_1{}'$ の方程式を m を用いて表せ。

(2) l_1 と $l_1{}'$ の距離 d_1 および l_2 と $l_2{}'$ の距離 d_2 をそれぞれ m を用いて表せ。ただし, 平行な 2 直線 l , l' の距離とは, l 上の 1 点と直線 l' の距離である。

(3) $(d_1)^2+(d_2)^2$ は m によらず一定であることを示せ。

(4) l_1 , $l_1{}'$, l_2 , $l_2{}'$ で囲まれる長方形の面積 S を d_1 を用いて表せ。さらに m が変化するとき, S の最大値を求めよ。

（筑波大）

$\boxed{12}$

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ に外接する長方形の面積の最大値と最小値を求めよ。

（長崎大）

・わずかな進歩を喜びなさい。いらいらしないように。
　短気は成長の邪魔をするものですから。

$\boxed{13}$

a , b を正の実数とし，円 C_1 : $(x-a)^2+y^2=a^2$ と楕円 C_2 : $x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を考える。

(1) C_1 が C_2 に内接するための a , b の条件を求めよ。

(2) $b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とし，C_1 が C_2 に内接しているとする。このとき，第 1 象限における C_1 と C_2 の接点の座標 (p , q) を求めよ。

(3) (2) の条件のもとで，$x \geqq p$ の範囲において，C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

（東工大）

$\boxed{14}$

a が与えられた実数のとき，xyz 空間の点 $\mathrm{C}(a , 0 , 3)$ から出た光が球

$$x^2+y^2+(z-1)^2 \leqq 1$$

でさえぎられてできる xy 平面上の影を S とする。点 $(X , Y , 0)$ が S に含まれる条件を求めよ。

（東工大）

・大きな楽しみのために，小さな楽しみを捨てるのが，賢い人である。

$\boxed{15}$

xy 平面上で原点を極, x 軸の正の部分を始線とする極座標に関して, 極方程式 $r=2+\cos\theta \quad (0\leqq\theta\leqq\pi)$ により表される曲線を C とする。C と x 軸とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ。

（京都大）

$\boxed{16}$

だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ について次の問いに答えよ。

(1) その焦点 $\mathrm{F}(ae\,,0)$ （ただし $e>0$ とする）を極, x 軸の正の方向を始線（原線）とする極方程式を求めよ。

(2) F を通る 2 つの弦 PQ , RS が直交するとき

$\dfrac{1}{\mathrm{PF}\cdot\mathrm{QF}}+\dfrac{1}{\mathrm{RF}\cdot\mathrm{SF}}$ の値を求めよ。

（東工大）

・人生は短い。　それはまるで, たった 1 日のように。

２. 複素数平面

$\boxed{1}$

$z+\dfrac{4}{z}$ が実数であり, かつ $|z-2|=2$ であるような複素数 z を求めよ。

（一橋大）

$\boxed{2}$

相異なる 4 つの複素数 z_1, z_2, z_3, z_4 に対して

$$w=\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$$

とおく。このとき, 以下を証明せよ。

(1) 複素数 z が単位円上にあるための必要十分条件は

$\overline{z}=\dfrac{1}{z}$ である。

(2) z_1, z_2, z_3, z_4 が単位円上にあるとき, w は実数である。

(3) z_1, z_2, z_3 が単位円上にあり, w が実数であれば, z_4 は単位円上にある。

（京都大）

・誰より自由に生きろ！　運命をも手繰りよせるほどに。

$\boxed{3}$

複素数 $\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ に対し, 次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6$

(2) $\dfrac{1}{1-\alpha}+\dfrac{1}{1-\alpha^6}$

(3) $\dfrac{1}{1-\alpha}+\dfrac{1}{1-\alpha^2}+\dfrac{1}{1-\alpha^3}+\dfrac{1}{1-\alpha^4}+\dfrac{1}{1-\alpha^5}+\dfrac{1}{1-\alpha^6}$

(4) $\dfrac{\alpha^2}{1-\alpha}+\dfrac{\alpha^4}{1-\alpha^2}+\dfrac{\alpha^6}{1-\alpha^3}+\dfrac{\alpha^8}{1-\alpha^4}+\dfrac{\alpha^{10}}{1-\alpha^5}+\dfrac{\alpha^{12}}{1-\alpha^6}$

（神戸大）

$\boxed{4}$

複素数 z を $z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ とおく。

次の問に答えよ。

(1) $z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ の値を求めよ。

(2) 複素数平面において, 1 , z , z^2 , z^3 , z^4 , z^5 , z^6 が表す点を, それぞれ, P_0 , P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 , P_6 とする。$\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_4$ の重心を $\mathrm{Q}(\alpha)$, $\triangle\mathrm{P}_3\mathrm{P}_5\mathrm{P}_6$ の重心を $\mathrm{R}(\beta)$ とおくとき, 複素数 α と β を求めよ。

(3) $\triangle\mathrm{P}_0\mathrm{QR}$ の面積を求めよ。

（早稲田大）

・自分が元気になる一番の方法は, 他の誰かを元気にすることである。

$\boxed{5}$

複素数 α, β は $\alpha^2-2\alpha\beta+4\beta^2=0$ を満たし, かつ $\beta \neq 0$ とする。このとき複素数平面上で点 α, β および原点 O を頂点とする三角形の 3 辺の長さの比を求めよ。

（お茶の水女子大）

$\boxed{6}$

(1) A(α), B(β), C(γ) が正三角形の頂点であるとき,
$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$ ……(*)
が成立することを示せ。

(2) 逆に, この関係式 (*) が成立するとき, A=B=C となるか, または, A, B, C が正三角形の頂点となることを示せ。

（金沢大）

・過去を思い返す日が来たときには,
「もがき苦しんだ日々こそが, 最も素晴らしい」と気がつくだろう。

$\boxed{7}$

異なる複素数 α , β , γ が $2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma=0$ を満たすとき

(1) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の値を求めよ。

(2) 複素数平面上で, 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$, $\mathrm{C}(\gamma)$ を頂点とする△ABC はどのような三角形か。

(3) α , β , γ が x の 3 次方程式 $x^3+kx+20=0$（k は実数の定数）の解であるとき, α , β , γ および k の値を求めよ。

（横浜国立大）

$\boxed{8}$

次の問に答えよ。

(1) 複素数 z が, $|z-1|=1$ をみたすとき, 複素数平面上で

$$w=\frac{z-i}{z+i}$$

によって定まる点 w の軌跡を図示せよ。

(2) （1）の w について $iw+3i-4$ の偏角 θ の範囲を求めよ。ただし, $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

（早稲田大）

・経験とは, 自分の失敗に対して与える名前のことである。

$\boxed{9}$

t を実数とするとき, 2 次方程式 $z^2+tz+t=0$ について, 次の問いに答えよ。

(1) この 2 次方程式が異なる 2 つの虚数解をもつような t の範囲と, そのときの虚数解をすべて求めよ。

(2) (1) の虚数解のうちで, その虚部が正のものを $z(t)$ で表す。t が (1) で求めた範囲を動くとき, 複素数平面上で点 $z(t)$ が描く図形 C を求め, 図示せよ。

(3) 複素数平面上で, 点 z が (2) の図形 C 上を動くとき, $w=\dfrac{iz}{z+1}$ で表される点 w が描く図形を求め, 図示せよ。

(九州大)

$\boxed{10}$

a , b を実数とする。3 次方程式

$$x^3+ax^2+bx+1=0$$

は 3 つの複素数からなる解 α_1 , α_2 , α_3 をもち, 相異なる i , j に対し $|\alpha_i-\alpha_j|=\sqrt{3}$ をみたしている。このような a , b の組をすべて求めよ。

(京都大)

・お前の人生の主役は誰だ？
　今, 目の前のその人にお前の生き様を魅せつけろ！

$\boxed{11}$

a , b を正の整数とし,

$$f(x)=x^4+ax^3+(a+b)x^2+(2-a)x+1$$

とおく。4 次方程式 $f(x)=0$ の解がすべて絶対値 1 の複素数であるとき, 以下の問に答えよ。

(1) $f(x)=0$ のどの解も実数ではないことを示せ。

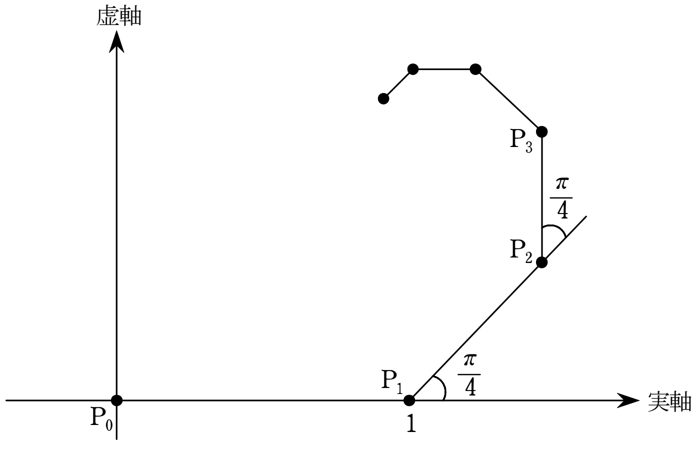
(2) a , b を求めよ。

(3) $f(x)=0$ の四つの解を頂点とする, 複素数平面上の四角形の面積を求めよ。

（早稲田大）

$\boxed{12}$

下図のように複素数平面の原点を P_0 とし, P_0 から実軸の正の方向に 1 進んだ点を P_1 とする。次に P_1 を中心として $\dfrac{\pi}{4}$ 回転して向きを変え, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 進んだ点を P_2 とする。以下同様に P_n に到達した後, $\dfrac{\pi}{4}$ 回転してから前回進んだ距離の $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍進んで到達する点を P_{n+1} とする。このとき点 P_{10} が表す複素数を求めよ。



（日本女子大）

・絶対に諦めるな。
叶えたいと願ってきたその未来が来るのは明日かもしれないのだから。

$\boxed{13}$

複素数平面上の点列 A_n $(n \geqq 0)$ が複素数列 $a_n + ib_n$ (a_n, b_n は実数, i は虚数単位) を表すとする。極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a_\infty$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = b_\infty$ がともに存在するとき, 複素数 $a_\infty + ib_\infty$ を表す点 A_∞ を A_n の極限点ということにする。このとき次の問に答えよ。

(1) 複素数平面上の点列 P_n $(n \geqq 0)$ を次のように定める。P_0 は 0 を表す点とし, P_1 は $1+i$ を表す点とする。以下 $n \geqq 2$ に対しては, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_{n-2}\mathrm{P}_{n-1}}$ を反時計まわりに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転し, 長さを $\dfrac{2}{3}$ 倍したベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$ となるように P_n を定める。P_n の極限点 P_∞ が表す複素数を求めよ。

(2) 点列 Q_n $(n \geqq 0)$ は次のように定める。Q_0 は 0 を表す点とし, Q_1 は $z = x + iy$ を表す点とする。以下 $n \geqq 2$ に対しては, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{Q}_{n-2}\mathrm{Q}_{n-1}}$ を反時計まわりに $\dfrac{\pi}{6}$ 回転し, 長さを $\dfrac{1}{2}$ 倍したベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{Q}_{n-1}\mathrm{Q}_n}$ となるように Q_n を定める。Q_n の極限点 Q_∞ と（1）の P_∞ が一致するとき z を求めよ。

（東工大）

$\boxed{14}$

正数 a に対して, 放物線 $y = x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a, a^2)$ における接線を, A を中心に $-30°$ 回転した直線を l とする。l と $y = x^2$ との交点で A でない方を B とする。さらに点 $(a, 0)$ を C, 原点を O とする。

(1) l の式を求めよ。

(2) 線分 OC, CA と $y = x^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$, 線分 AB と $y = x^2$ で囲まれる部分の面積を $T(a)$ とする。このとき

$$\lim_{a\to\infty} \frac{T(a)}{S(a)}$$

を求めよ。

（東工大）

・人は自らの心の持ち方を変えることによって,
自分の人生をも変えられる。

$\boxed{15}$

点 P$(t\,,\,s)$ が $s=\sqrt{2}\,t^2-2t$ を満たしながら xy 平面上を動くときに, 点 P を原点を中心として 45° 回転した点 Q の軌跡として得られる曲線を C とする。さらに, 曲線 C と x 軸で囲まれた図形を D とする。

(1) 点 Q$(x\,,\,y)$ の座標を, t を用いて表せ。
(2) 直線 $y=a$ と曲線 C がただ 1 つの共有点を持つような定数 a の値を求めよ。
(3) 図形 D を y 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積 V を求めよ。

（東工大）

$\boxed{16}$

複素数 $a_n\,(n=1\,,2\,,\cdots\cdots)$ を次のように定める。

$$a_1=1+i\ \ ,\ \ a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n-3}$$

ただし, i は虚数単位である。このとき以下の問いに答えよ。
(1) 複素数平面上の 3 点 $0\,,\,a_1\,,\,a_2$ を通る円の方程式を求めよ。
(2) すべての a_n は (1) で求めた円上にあることを示せ。

（北海道大）

・勇気とは恐れを持たぬことではない。
恐れを感じたとき, それに打ち勝つことである。

$\boxed{17}$

複素数平面上の点 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ を

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = i, \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ (n = 1, 2, \cdots\cdots) \end{cases}$$

により定め $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ とおく。ただし, i は虚数単位である。

(1) 3 点 b_1, b_2, b_3 を通る円 C の中心と半径を求めよ。

(2) すべての点 b_n $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ は円 C の周上にあることを示せ。

（東京大）

$\boxed{18}$

複素数 z_n $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ が次の式を満たしている。

$$z_1 = 1 \ , \ z_2 = \frac{1}{2} \ , \ z_n z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{n-1} \ , \ n = 2, 3, 4, \cdots\cdots$$

(1) 複素数平面上に z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 を図示せよ。

(2) z_n を求めよ。

(3) 和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{2002} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots\cdots + z_{2002}$ を計算せよ。

（早稲田大）

・人生における唯一の意義とは, 人のために生きることである。

$\boxed{19}$

n を 3 以上の自然数とするとき, 次を示せ。ただし, $\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ とし, i を虚数単位とする。

(1) $\alpha^k+\overline{\alpha^k}=2\cos\dfrac{2\pi k}{n}$

ただし, k は自然数とし, $\overline{\alpha}$ は α に共役な複素数とする。

(2) $n=(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots\cdots(1-\alpha^{n-1})$

(3) $\dfrac{n}{2^{n-1}}=\sin\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{2\pi}{n}\cdots\cdots\sin\dfrac{n-1}{n}\pi$

（北海道大）

$\boxed{20}$

O を原点とする複素数平面上で 6 を表す点を A , $7+7i$ を表す点を B とする。ただし, i は虚数単位である。正の実数 t に対し, $\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$ を表す点 P をとる。

(1) $\angle$APB を求めよ。

(2) 線分 OP の長さが最大になる t を求めよ。

（東京大）

・計算ミスをするくらいなら,
白紙の答案を提出するほうが, はるかに賢明である。