極限の７公式

$$\circ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\circ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\circ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

$$\circ \lim_{n\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

$$\circ \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$$

$$\circ \lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=1$$

$$\circ \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$$

１. 極限の計算・極限の応用

$\boxed{1}$

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 2x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{n}\right)^n$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+3x)}{2x}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}2x\{\log(x+2)-\log x\}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin^2 3x}-1}{x\log(1+x)}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$　(8) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{\log(\sin x)}{\log x}$

$\boxed{2}$

1 直線上に 3 点 O , A , B をこの順序にとり, OA＝1 , AB＝2 となるようにする。O を通り OA に垂直な直線上の動点を P とし, OP＝h , ∠OPA＝α , ∠APB＝β とするとき,

$\displaystyle\lim_{h\to\infty}\frac{\alpha}{\beta}$ を求めよ。

（千葉大）

・一日を大切にせよ。その差が人生の差につながる。

$\boxed{3}$

母線の長さが 1 である正 n 角錐を考える。つまり, 底面を正 n 角形 $A_1A_2 \cdots A_n$, 頂点を O と表せば $OA_1=OA_2=\cdots=OA_n=1$ である。そのような正 n 角錐のなかで最大の体積をもつものを C_n とする。

(1) C_n の体積 V_n を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} V_n$ を求めよ。

（東工大）

$\boxed{4}$

n を 2 以上の整数とする。平面上に $n+2$ 個の点 O , P_0 , P_1 , $\cdots$, P_n があり, 次の 2 つの条件をみたしている。

① $\angle P_{k-1}OP_k=\dfrac{\pi}{n}$ $(1\leqq k\leqq n)$, $\angle OP_{k-1}P_k=\angle OP_0P_1$ $(2\leqq k\leqq n)$

② 線分 OP_0 の長さは 1 , 線分 OP_1 の長さは $1+\dfrac{1}{n}$ である。

線分 $P_{k-1}P_k$ の長さを a_k とし, $s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n$ を求めよ。

（東京大）

・決して諦めてはいけない。諦めるその時その場所でこそ,
流れが変わろうとしているのだから。

２. 微分法の応用

$\boxed{1}$

a は実数とする。曲線 $y=e^x$ 上の各点における法線のうちで, 点 $\mathrm{P}(a\,,3)$ を通るものの個数を $n(a)$ とする。$n(a)$ を求めよ。

（大阪大）

$\boxed{2}$

a を実数とし, $x>0$ で定義された関数 $f(x)\,,\,g(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\frac{\cos x}{x}$$

$$g(x)=\sin x+ax$$

このとき $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが $x>0$ において共有点をちょうど 3 つ持つような a をすべて求めよ。

（東京大）

・自分の実力の不十分なことを知ることこそ, 自分の実力になる。

$\boxed{3}$

曲線 C : $y=\dfrac{1}{x+2}$ $(x>-2)$ を考える。曲線 C 上の点 $\mathrm{P}_1\left(0\,,\,\dfrac{1}{2}\right)$ における接線を l_1 とし, l_1 と x 軸との交点を Q_1 , 点 Q_1 を通り x 軸と垂直な直線と曲線 C との交点を P_2 とおく。以下同様に, 自然数 n $(n\geqq 2)$ に対して, 点 P_n における接線を l_n とし, l_n と x 軸との交点を Q_n , 点 Q_n を通り x 軸と垂直な直線と曲線 C との交点を P_{n+1} とおく。

(1) l_1 の方程式を求めよ。

(2) P_n の x 座標を x_n $(n\geqq 1)$ とする。x_{n+1} を x_n を用いて表し, x_n を n を用いて表せ。

(3) l_n , x 軸 , y 軸で囲まれる三角形の面積 S_n を求め, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

(筑波大)

$\boxed{4}$

関数 $f(x)=xe^x+(1-e^x)\log(1-e^x)$ $(x<0)$ について, 次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の増減と極値を調べ, $y=f(x)$ のグラフの概形を描け。ただし, グラフの凹凸と変曲点は調べなくてよい。必要なら, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$, $\lim\limits_{x\to+0} x\log x=0$ を用いてもよい。

(2) 曲線 C_1 : $y=e^x+k$ と曲線 C_2 : $y=x-e^x$ が共通接線を持つような, 実数 k の範囲を求めよ。

(旭川医科大)

**・我々にとって最大の栄光は, 一度も失敗しなかったことではなく,
倒れる度に必ず起き上がったことである。**

$\boxed{5}$

座標平面において, 点 P$(0\,,1)$ を中心とする半径 1 の円を C とする。a を $0<a<1$ を満たす実数とし, 直線 $y=a(x+1)$ と C との交点を Q , R とする。

(1) △PQR の面積 $S(a)$ を求めよ。

(2) a が $0<a<1$ の範囲を動くとき, $S(a)$ が最大となる a を求めよ。

（東京大）

$\boxed{6}$

次の連立不等式で定まる座標平面上の領域 D を考える。

$$x^2+(y-1)^2\leqq 1,\quad x\geqq\frac{\sqrt{2}}{3}$$

直線 l は原点を通り, D との共通部分が線分となるものとする。その線分の長さ L の最大値を求めよ。また, L が最大値をとるとき, x 軸と l のなす角 θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の余弦 $\cos\theta$ を求めよ。

（東京大）

・行く価値のある場所には近道などひとつもない。

$\boxed{7}$

2 つの数 $(0.99)^{99}$ と $(1.01)^{-101}$ との大小を比較せよ。

（名古屋大）

$\boxed{8}$

(1) $x>0$ のとき, $\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ と $\dfrac{1}{x+1}$ の大小関係を調べよ。

(2) $\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$ と $\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}$ の大小関係を調べよ。

（名古屋大）

・自分自身に負けない限り, それは敗北ではないのです。

３．定積分の計算

$\boxed{1}$ 1 次関数との合成型

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x dx$　(2) $\displaystyle\int_0^1 e^{2x-1} dx$　(3) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{3-2x}\, dx$　(4) $\displaystyle\int_0^1 \log(3x+1) dx$

$\boxed{2}$ f, g, g' 型

(1) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)(x^2+x+1)^2 dx$　(2) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2} dx$　(3) $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\, dx$

$\boxed{3}$ $\dfrac{f'}{f}$ 型

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$　(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx$

$\boxed{4}$ 円の一部型

(1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$　(2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\, dx$

・周りを巻き込む向上心で突き進め！！

$\boxed{5}$ 置換積分法

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{3+x^2}dx$　　(3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3}{(x+2)^2}dx$

$\boxed{6}$ 部分積分法

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\cos x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\sin 2x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{-x}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 (x^2-2x+3)e^x dx$　(5) $\displaystyle\int_1^e x\log x\,dx$

$\boxed{7}$ 工夫が必要な積分法

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin 3x\sin 2x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin 5x\cos 3x\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x\sin x\,dx$　　(5) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}dx$

・何かを失うほど, 何かを全力で求めなくてはならない。

４. 定積分と面積

$\boxed{1}$

実数 $t>1$ に対し, xy 平面上の点

$$\mathrm{O}(0\,,\,0)\,,\ \mathrm{P}(1\,,\,1)\,,\ \mathrm{Q}\left(t\,,\,\frac{1}{t}\right)$$

を頂点とする三角形の面積を $a(t)$ とし, 線分 OP , OQ と双曲線 $xy=1$ とで囲まれた部分の面積を $b(t)$ とする。このとき

$$c(t)=\frac{b(t)}{a(t)}$$

とおくと, 関数 $c(t)$ は $t>1$ においてつねに減少することを示せ。

（東京大）

$\boxed{2}$

曲線 C : $y=\sqrt{3}\,e\log x$ がある。ここに対数は自然対数で, e はその底とする。

(1) 原点 O から曲線 C にひいた接線の方程式を求めよ。

(2) (1) における接線の接点を A とする。曲線 C の下側にあって, x 軸と点 B で接し, かつ A で曲線 C と共通の接線をもつ円の中心を P とする。曲線 C と x 軸および円の弧 AB (中心角 $\angle\mathrm{APB}<\pi$ に対する弧) で囲まれた図形の面積を求めよ。

（東北大）

・失敗を恐れるな。よいことは必ず失敗の後にやってくるのだから。

$\boxed{3}$

3 つの曲線

$$C_1: y=\sin x \ \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$C_2: y=\cos x \ \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$C_3: y=\tan x \ \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2}\right)$$

について以下の問いに答えよ。

(1) C_1 と C_2 の交点, C_2 と C_3 の交点, C_3 と C_1 の交点のそれぞれについて y 座標を求めよ。

(2) C_1 , C_2 , C_3 によって囲まれる図形の面積を求めよ。

（筑波大）

$\boxed{4}$

a を正の実数とする。座標平面において曲線 $y=\sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を S とし, 曲線 $y=\sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$, 曲線 $y=a\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ および x 軸で囲まれた図形の面積を T とする。このとき $S:T=3:1$ となるような a の値を求めよ。

（京都大）

・解けない問題があるってことは,
解ける問題が増えるっていう合図だよ。

５. 定積分で表された関数

$\boxed{1}$

関数 $f(a)$ を次の式で与える。

$$f(a)=\int_{a-1}^{a}|x|e^{x}dx$$

a が $a \geqq 0$ の範囲を動くとき, $f(a)$ の最小値と, その最小値を与える a の値を求めよ。

（津田塾大）

$\boxed{2}$

自然数 n に対し, 関数

$$F_n(x)=\int_{x}^{2x}e^{-t^n}dt \quad (x \geqq 0)$$

を考える。

(1) 関数 $F_n(x)$ $(x \geqq 0)$ はただ一つの点で最大値をとることを示し, $F_n(x)$ が最大となるような x の値 a_n を求めよ。

(2) (1) で求めた a_n に対し, 極限値 $\lim\limits_{n\to\infty}\log a_n$ を求めよ。

（筑波大）

・過去が知りたければ, 現在の状況を見ろ
　未来が知りたければ, 現在の行動を見ろ

$\boxed{3}$

$a>0$, $t>0$ に対して定積分

$$S(a,t)=\int_0^a \left| e^{-x}-\frac{1}{t} \right| dx$$

を考える。

(1) a を固定したとき, t の関数 $S(a,t)$ の最小値 $m(a)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{a\to 0}\frac{m(a)}{a^2}$ を求めよ。

（東工大）

$\boxed{4}$

実数 x に対して

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t - x\sin 2t|\,dt$$

とおく。

(1) 関数 $f(x)$ の最小値を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ を求めよ。

（東工大）

・十のことをして, 一つしかうまくいかないのなら,
　十倍努力すればよいだけである。

６. 区分求積法・積分漸化式

$\boxed{1}$

極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$$

の値は $\boxed{\quad ア \quad}$ である。

（早稲田大）

$\boxed{2}$

O を原点とする xyz 空間に点 $P_k\left(\dfrac{k}{n}, 1-\dfrac{k}{n}, 0\right), k=0, 1, \cdots, n,$ をとる。また, z 軸上 $z \geqq 0$ の部分に, 点 Q_k を線分 P_kQ_k の長さが 1 になるようにとる。三角錐 $OP_kP_{k+1}Q_k$ の体積を V_k とおいて, 極限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k$$

を求めよ。

（東京大）

・成功の99%は, 以前の失敗の上に築かれる。

3

[A]自然数 n に対して $I_n=\int_1^e(\log x)^n dx$ とする。

(1) I_1 を求めよ。また, I_{n+1} を I_n を用いて表せ。

(2) I_4 を求めよ。

[B]負でない整数 n に対して $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ とする。

(1) I_{n+2} を I_n を用いて表せ。

(2) I_4 , I_5 を求めよ。

[C]自然数 n に対して $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$ とする。

(1) I_1 , I_2 を求めよ。

(2) I_{n+2} を I_n を用いて表せ。

(3) I_4 , I_5 を求めよ。

(頻出問題)

4

(1) 0 以上の整数 m , $n=0,1,2,\cdots$ に対し, $I(m,n)$ を

$$I(m,n)=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$$

で定める。

(i) $m\geqq 1$ のとき, 部分積分法を用いて,

$$I(m,n)=\frac{m}{n+1}\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n+1}dx$$

が成り立つことを示しなさい。

(ii) $I(m,n)=\dfrac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$ を示しなさい。

(2) $f(x)$ を区間 $[\,0,1\,]$ で定義された連続関数とする。自然数 $n=1,2,3,\cdots$ に対し, 多項式 $P_n(x)$ を

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}$$

で定める。ここで, ${}_nC_k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ である。このとき,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 P_n(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$$

となることを示しなさい。

(東京理科大)

・成功者になろうとするのではなく, 価値のある人間になろうとせよ。

７. 関数方程式

$\boxed{1}$

関数 $f(x)$ は $-\infty < x < \infty$ で連続であり, ある定数 a とすべての正数 x について

$$\int_0^{\log x} f(t)dt = \frac{x}{a}(\log x - 1)\int_0^1 e^t f(t)dt + 1$$

を満たしている。このとき, $f(x)$ と a の値を求めよ。

（東京理科大）

$\boxed{2}$

連続関数 $f(x)$ はすべての実数 x に対して

$$\int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(x-t)dt = e^{-x} - 1$$

を満たしている。

(1) $\dfrac{d}{dx}\{f(x)e^x\}$ を求めよ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

（芝浦工業大）

・自分には何が出来て, 何が出来ないのか,
他の誰かに自分を決めつけさせるな。

$\boxed{3}$

$f(x)$ は微分可能な関数で, その導関数 $f'(x)$ も微分可能とする。$f(x)$ は方程式

$$f(x)=\sin x+\int_0^x f(x-t)\sin t\,dt$$

を満たしている。このとき, 次の各問いに答えよ。

(1) $f(0)$ および $f'(0)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ の 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ。

(3) $f(x)$ を求めよ。

（東京理科大）

$\boxed{4}$

次の等式を満たす関数 $f(x)$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$ がただ一つ定まるための実数 a , b の条件を求めよ。また, そのときの $f(x)$ を決定せよ。

$$f(x)=\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x+y)f(y)dy+\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x-y)f(y)dy+\sin x+\cos x$$

ただし, $f(x)$ は区間 $0\leqq x\leqq 2\pi$ で連続な関数とする。

（東京大）

・偶然ではありません。
あなたを訪れるものは, みな, あなたを教えに来るのです。

$\boxed{5}$

すべての実数 x の値において微分可能な関数 $f(x)$ は次の 2 条件を満たすものとする。

- すべての実数 x, y に対して $f(x+y)=f(x)+f(y)+8xy$
- $f'(0)=3$

ここで, $f'(a)$ は関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数である。

以下の問いに答えなさい。

(a) $f(0)=\boxed{ア}$

(b) $\lim_{y\to 0}\dfrac{f(y)}{y}=\boxed{イ}$

(c) $f'(1)=\boxed{ウ}\boxed{エ}$, $f'(-1)=-\boxed{オ}$

(d) $\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{\boxed{カ}\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$

（東京理科大）

$\boxed{6}$

関数 $f(x)$ は $(-\infty, +\infty)$ において 2 回微分可能で $f''(0)=-1$ を満たし, かつ任意の実数 x, y に対して,

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

を満たす。

(1) $f(0)$ の値を求めよ。また, y について微分して $f'(0)$ の値を求めよ。

(2) $f''(x)=-f(x)$ を導け。

(3) $F(x)=f(x)\cos x-f'(x)\sin x$, $G(x)=f(x)\sin x+f'(x)\cos x$ とおいたとき, 関数 $F(x)$, $G(x)$ はともに定数であることを証明し, それらの値を求めよ。

(4) $f(x)$ を決定せよ。

（東京理科大）

・人間は努力する限り, 迷うものだ。

$\boxed{7}$

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy\ ,\ f'(0)=1$$

(1) $f(0)$ の値を求めよ。

(2) すべての実数 x において, $f(x)$ が微分可能であることを示し, $f(x)$ を求めよ。

（学習院大）

$\boxed{8}$

関数 $f(x)$ はすべての実数 s , t に対して

$$f(s+t)=f(s)e^t+f(t)e^s$$

を満たし, さらに $x=0$ では微分可能で $f'(0)=1$ とする。

(1) $f(0)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}$ を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ はすべての x で微分可能であることを, 微分の定義に従って示せ。さらに $f'(x)$ を $f(x)$ を用いて表せ。

(4) 関数 $g(x)$ を $g(x)=f(x)e^{-x}$ で定める。$g'(x)$ を計算して, 関数 $f(x)$ を求めよ。

（東京理科大）

・努力の成果なんて目には見えない。
しかし, 紙一重の薄さも重なれば, 本の厚さになる。

８. 平面の回転体

$\boxed{1}$

xy 平面上の 2 曲線 C_1 : $y=\dfrac{\log x}{x}$ と C_2 : $y=ax^2$ は点 P を共有し, P において共通の接線をもっている。ただし, a は定数とする。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=\dfrac{\log x}{x}$ の増減, 極値, グラフの凹凸, 変曲点を調べ, C_1 の概形を描け。ただし, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ は証明なしに用いてよい。

(2) P の座標および a の値を求めよ。

(3) 不定積分 $\displaystyle\int\left(\frac{\log x}{x}\right)^2 dx$ を求めよ。

(4) C_1 , C_2 および x 軸で囲まれる部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

（横浜国立大）

$\boxed{2}$

xy 平面上に 2 点 A$(-1 , 0)$, B$(1 , 0)$ をとる。$\dfrac{\pi}{4}\leqq\angle \mathrm{APB}\leqq\pi$ をみたす平面上の点 P の全体と点 A , B からなる図形を F とする。つぎの問に答えよ。

(1) F を図示せよ。

(2) F を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ。

（早稲田大）

・たいしたことができないからといって, 何もしないのは
　最悪の間違いである。今すぐ自分ができることをせよ！！

$\boxed{3}$

関数 $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ のグラフと x 軸および直線 $x=\dfrac{1}{2}$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を V_1 , y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を V_2 とすると $V_1=\dfrac{\pi}{2}\boxed{\text{（お）}}$, $V_2=\dfrac{\pi}{2}\boxed{\text{（か）}}$ である。

（慶応大）

$\boxed{4}$

座標平面上で 2 つの不等式

$$y \geqq \frac{1}{2}x^2,\ \frac{x^2}{4}+4y^2 \leqq \frac{1}{8}$$

によって定まる領域を S とする。S を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1 とし, y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_2 とする。

(1) V_1 と V_2 の値を求めよ。

(2) $\dfrac{V_2}{V_1}$ の値と 1 の大小を判定せよ。

（東京大）

・大事なのは, 勝ちたいという気持ちではない。
それは誰でも持っている。
大事なのは, 勝つための準備をすることだ。

9．パラメーター

$\boxed{1}$

(1) 曲線 C : $\begin{cases} x=\sin 2t \\ y=(1-t)^2 \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$

の概形をかけ。

(2) 曲線 C と x 軸および y 軸とでかこまれる部分 D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

（関西大）

$\boxed{2}$

座標平面上の曲線 C を媒介変数 $0 \leqq t \leqq 1$ を用いて

$$\begin{cases} x=1-t^2 \\ y=t-t^3 \end{cases}$$

と定める。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C の概形を描け。

(2) 曲線 C と x 軸で囲まれた部分が y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

（神戸大）

・君が努力していないときでも，
　必ずどこかで誰かが努力していることを忘れてはいけない。

$\boxed{3}$

座標平面において, 動点 P の座標 $(x\,,\,y)$ が時刻 t の関数として

$$x=t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{3}{4}}\ ,\quad y=t^{\frac{3}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}}\qquad(0\leqq t\leqq 1)$$

で与えられている。

(1) 動点 P の x 座標が最大になるのは $t=\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ のときであり,

y 座標が最大になるのは $t=\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ のときである。

(2) $0<t<1$ のとき, 動点 P の速さの最小値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である。

(3) 動点 P が直線 $y=x$ 上に来るのは $t=0$ のとき, $t=\dfrac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}$ のとき, $t=1$ のときの 3 回である。

(4) t が $0\leqq t\leqq 1$ の範囲を動くとき, 動点 P の描く曲線を L とする。L で囲まれる図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}$ である。

(上智大)

$\boxed{4}$

座標平面において, 媒介変数 t を用いて

$$\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=t\sin t \end{cases}\qquad(0\leqq t\leqq 2\pi)$$

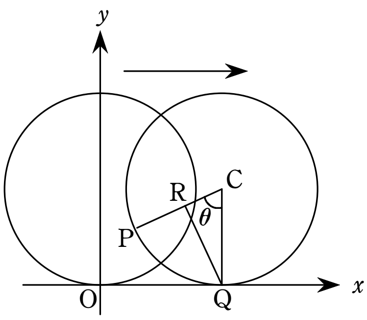
と表される曲線が囲む領域の面積を求めよ。

(東京大)

・失敗することが不可能であるかのように信じて行動しろ！！

5

点 C を中心とする半径 a の円を, x 軸に接しながらすべることなく回転させる。この円の円周上に定点 P をとる。初め, 点 P は原点 O にあるとする。この円が x 軸の正の方向へ角 θ だけ回転したとき, 線分 CP 上の点で, 円と x 軸との接点 Q に最も近い点を R とする。



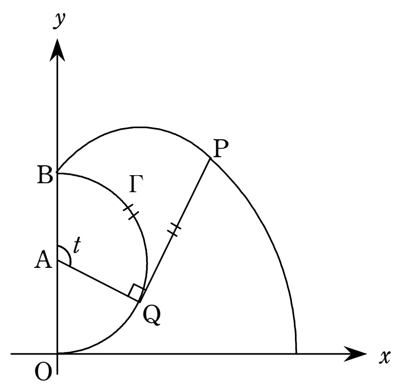
(1) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき, 点 R の座標を θ を用いて表せ。

(2) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のときの点 R の軌跡, 直線 $x = \dfrac{\pi}{2}a$, および x 軸で囲まれる図形を S とする。S の面積を求めよ。

（青山学院大）

6

原点を O とし, 平面上の 2 点 A$(0, 1)$, B$(0, 2)$ をとる。OB を直径とし点$(1, 1)$ を通る半円を Γ とする。長さ π の糸が一端を O に固定して, Γ に巻きつけてある。この糸の他端 P を引き, それが x 軸に到達するまで, ゆるむことなくほどいてゆく。糸と半円との接点を Q とし∠BAQ の大きさを t とする（図を見よ）。



(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を t を用いて表せ。
(2) P のえがく曲線と, x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

（早稲田大）

・想像力がすべてだ。
それは, 人生でこれから起きることの予告編である！！

$\boxed{7}$

座標平面上に半径 1 の円 C があり, その周上の 1 点が原点 O で固定されているとする。C の周上の点 P に長さ $\dfrac{\pi}{2}+1$ の糸の端点が固定されていて, 最初, 円 C と糸は図 1 の状態にある。この糸の円 C の周上にない部分を x 軸と平行に保ちながら, この糸の円 C の周上にない方の端点 Q を x 軸の負の向きに引いていく（図 2 参照）。すると, 糸の円周上に巻きついている部分が除々に減少し, それとともに円 C は原点 O を固定点として回転し, やがて点 P は y 軸上に到達する。ただし, 図 1 , 2 のいずれにおいても太線が糸を表している。

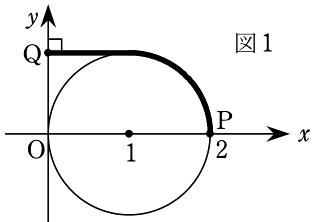


図 1

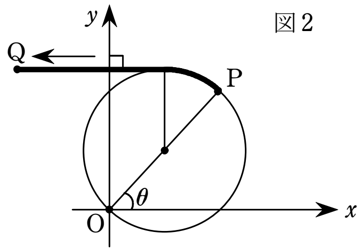


図 2

(1) 円 C が図 2 のように原点 O を固定点として θ だけ回転したときの糸の端点 Q の座標を求めよ。ただし, $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。

(2) 点 P が y 軸上に到達するまでに糸が通過する部分は, 平面上の図形 D を描く。D の面積を求めよ。

（東京理科大）

$\boxed{8}$

半径 10 の円 C がある。半径 3 の円板 D を, 円 C に内接させながら, 円 C の円周に沿って滑ることなく転がす。円板 D の周上の一点を P とする。点 P が, 円 C の円周に接してから再び円 C の円周に接するまでに描く曲線は, 円 C を 2 つの部分に分ける。それぞれの面積を求めよ。

（東京大）

・意欲が湧いたから取り組んだのではない
　取り組んだから意欲が湧いたのだ。

10 . 定積分と不等式

$\boxed{1}$

次の問いに答えよ。

(1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき, $\sin x \geqq \dfrac{2}{\pi}x$ であることを示せ。

(2) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-n\sin x}\,dx = 0$$

（大阪市立大）

$\boxed{2}$

数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x\,dx$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ で定める。ここで, e は自然対数の底である。

(1) a_{n+1} と a_n の関係式を求めよ。

(2) 自然数 n に対して, $a_n = b_n e + c_n$ となる整数 b_n , c_n があることを, 数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{c_n} = -\frac{1}{e}$ を示せ。

（新潟大）

・神は乗り越えられる試練しか与えない。

$\boxed{3}$

自然数 n に対して

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{2n}dx$$

とおく。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) a_1 を求めよ。

(2) a_{n+1} を a_n で表せ。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ を求めよ。

(北海道大)

$\boxed{4}$

n を自然数とし, $I_n=\int_1^e(\log x)^n dx$ とおく。

(1) I_{n+1} を I_n を用いて表せ。

(2) すべての n に対して $\dfrac{e-1}{n+1}\leqq I_n\leqq\dfrac{(n+1)e+1}{(n+1)(n+2)}$ が成り立つことを示せ。

(京都大)

・順調な人には, つまづく心配があるが, つまづいた人には,
起き上がり, 歩き出す楽しみがある。

$\boxed{5}$

$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$, $b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ とするとき, $\lim_{n\to\infty}a_n$, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$ を求めよ。

（東京大）

$\boxed{6}$

次の各問に答えよ。

(1) 自然数 n に対して, 次の不等式を証明せよ。

$$n\log n-n+1\leqq\log(n!)\leqq(n+1)\log(n+1)-n$$

(2) 次の極限の収束, 発散を調べ, 収束するときにはその極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n!)}{n\log n-n}$$

（都立大）

・ゼロからのスタートならば, 得るものばかりだ。

$\boxed{7}$

$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とする。以下の問に答えよ。

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形を次の点に注意して描け：$f(x)$ の増減, グラフの凹凸, $x\to+0$, $x\to\infty$ のときの $f(x)$ の挙動。

(2) n を自然数とする。$k=1, 2, \cdots, n$ に対して x が $e^{\frac{k-1}{n}}\leqq x\leqq e^{\frac{k}{n}}$ を動くときの $f(x)$ の最大値を M_k, 最小値を m_k とし,

$$A_n=\sum_{k=1}^{n}M_k\left(e^{\frac{k}{n}}-e^{\frac{k-1}{n}}\right),$$

$$B_n=\sum_{k=1}^{n}m_k\left(e^{\frac{k}{n}}-e^{\frac{k-1}{n}}\right)$$

とおく。A_n, B_n を求めよ。

(3) $\lim_{n\to\infty}A_n$ および $\lim_{n\to\infty}B_n$ を求めよ。

(4) 各 n に対して $B_n<\int_1^e f(x)dx<A_n$ であることを示せ。

（早稲田大）

$\boxed{8}$

(1) すべての自然数 k に対して, 次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx<\frac{1}{2k}$$

(2) $m>n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して, 次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}$$

（東京大）

・人生は後ろ向きにしか理解できないが, 前向きにしか生きられない。

11．空間の回転体

$\boxed{1}$

空間内に 3 点 $\mathrm{P}\left(1\,,\,\dfrac{1}{2}\,,\,0\right)$, $\mathrm{Q}\left(1\,,\,-\dfrac{1}{2}\,,\,0\right)$, $\mathrm{R}\left(\dfrac{1}{4}\,,\,0\,,\,\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ を頂点とする正三角形の板 S がある。S を z 軸のまわりに 1 回転させたとき, S が通過する点全体のつくる立体の体積を求めよ。

（東京大）

$\boxed{2}$

半径 1 の円板が, その中心 O において直線 l と角度 θ $\left(0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ で交わっている。l には, O を原点とする座標が定まっているものとする。

(1) l 上の点 x において, l と直交する平面と円板が交わるための, x の範囲を求めよ。

(2) l を軸として, 円板を回転してできる立体の体積を求めよ。

（立教大）

・最初はうまくいかなかったのなら, あなたは, ほぼ標準並みである。

$\boxed{3}$

xyz 空間内において, yz 平面上で放物線 $z=y^2$ と直線 $z=4$ で囲まれる平面図形を D とする。点$(1, 1, 0)$ を通り z 軸に平行な直線を l とし, l のまわりに D を 1 回転させてできる立体を E とする。

(1) D と平面 $z=t$ との交わりを D_t とする。ただし $0 \leqq t \leqq 4$ とする。点 P が D_t 上を動くとき, 点 P と点$(1, 1, t)$ との距離の最大値, 最小値を求めよ。

(2) 平面 $z=t$ による E の切り口の面積 $S(t)$ $(0 \leqq t \leqq 4)$ を求めよ。

(3) E の体積 V を求めよ。

（筑波大）

$\boxed{4}$

a を正の実数とし, 空間内の 2 つの円板

$$D_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leqq 1, z = a\}$$

$$D_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leqq 1, z = -a\}$$

を考える。D_1 を y 軸の回りに 180° 回転して D_2 に重ねる。ただし回転は z 軸の正の部分を x 軸の正の方向に傾ける向きとする。この回転の間に D_1 が通る部分を E とする。E の体積を $V(a)$ とし, E と$\{(x, y, z) \mid x \geqq 0\}$ との共通部分の体積を $W(a)$ とする。

(1) $W(a)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{a \to \infty} V(a)$ を求めよ。

（東京大）

・人の価値とは, その人が得たものではなく,
　その人が与えたもので測られる。

$\boxed{5}$

xyz 空間において, 2 点 P$(1,0,1)$, Q$(-1,1,0)$ を考える。線分 PQ を x 軸の周りに 1 回転して得られる曲面を S とする。以下の問いに答えよ。

(1) 曲面 S と, 2 つの平面 $x=1$ および $x=-1$ で囲まれる立体の体積を求めよ。

(2) (1) の立体の平面 $y=0$ による切り口を, 平面 $y=0$ 上において図示せよ。

(3) 定積分 $\int_0^1 \sqrt{t^2+1}\,dt$ の値を $t=\dfrac{e^s-e^{-s}}{2}$ と置換することによって求めよ。

これを用いて, (2) の切り口の面積を求めよ。

（早稲田大）

$\boxed{6}$

xyz 空間内の 3 点 O$(0,0,0)$, A$(1,0,0)$, B$(1,1,0)$ を頂点とする三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる円すいを V とする。円すい V を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

（大阪大）

（＊）この問題の中で, 曲面の方程式について扱います。

・人が失敗する最大の要因は, 才能や能力がないからではなく,
自分を信じないことにある。

$\boxed{7}$

$a^2+b^2=1$ を満たす正の実数 a , b の組 (a,b) の全体を S とする。S に含まれる (a,b) に対し, xyz 空間内に 3 点 $\mathrm{P}(a,b,b)$, $\mathrm{Q}(-a,b,b)$, $\mathrm{R}(0,0,b)$ をとる。また原点を O とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) 三角形 OPQ を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を F_1 とする。
(a,b) が S の中を動くとき, F_1 の体積の最大値を求めよ。

(2) 三角形 PQR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を F_2 とする。
$a=b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき, F_2 の xy 平面による切り口の周を xy 平面上に図示せよ。

(3) 三角形 OPR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を F_3 とする。
(a,b) が S の中を動くとき, F_3 の体積の最大値を求めよ。

（東京医科歯科大）

$\boxed{8}$

xyz 空間の原点と点$(1,1,1)$ を通る直線を l とする。

(1) l 上の点$\left(\dfrac{t}{3},\dfrac{t}{3},\dfrac{t}{3}\right)$ を通り l と垂直な平面が, xy 平面と交わってできる直線の方程式を求めよ。

(2) 不等式 $0\leqq y\leqq x(1-x)$ の表す xy 平面内の領域を D とする。l を軸として D を回転させて得られる回転体の体積を求めよ。

（東工大）

・人生の目的をはっきり決めて，
それに沿って自分のすべての行動を組み立てろ。

12 . 不等式で表された立体の体積

1

xyz 空間において, 不等式

$$\begin{cases} 0 \leqq z \leqq 1+x+y-3(x-y)y \\ 0 \leqq y \leqq 1 \\ y \leqq x \leqq y+1 \end{cases} \quad \cdots\cdots \ (*)$$

の表す立体の体積を求めよ。

（東京大）

2

xyz 空間において, 立体

$$K : x^2+y^2 \leqq 1 \ , \ y \geqq 2z \ , \ \frac{1}{4} \leqq z \leqq 2$$

を考える。

(1) 立体 K と平面 $y=t$ とが交わる条件は,

$$\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}} \leqq t \leqq \boxed{\text{ノ}}$$

である。このときの切り口の面積を $S(t)$ とすると,

$$S(t)=\sqrt{\boxed{\text{ハ}}-t^2}\left(t-\frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}\right)$$

である。

(2) 立体 K の体積は $\dfrac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}\sqrt{\boxed{\text{マ}}}+\dfrac{\boxed{\text{ミ}}}{\boxed{\text{ム}}}\pi$ である。

(3) 立体 K を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積は $\dfrac{\boxed{\text{メ}}}{\boxed{\text{モ}}}\pi$ である。

（上智大）

・自分の失敗ではなく成功に意識を向けて, それを積み重ねよ。

$\boxed{3}$

r を正の実数とする。xyz 空間において

$$x^2+y^2 \leqq r^2$$

$$y^2+z^2 \geqq r^2$$

$$z^2+x^2 \leqq r^2$$

をみたす点全体からなる立体の体積を求めよ。

（東京大）

・毎日を, その日の収穫高で判断せず, まいた種で判断しなさい

13 . 斜面で囲まれた立体の体積

$\boxed{1}$

放物線 $z=\dfrac{3}{4}-x^2$ を z 軸のまわりに回転して得られる曲面 K を, 原点を通り回転軸と 45° の角をなす平面 H で切る。曲面 K と平面 H で囲まれた立体の体積を求めよ。

（東京大）

$\boxed{2}$

xyz 空間において yz 平面上の曲線 $y^2-\dfrac{z^2}{2}=1$ を z 軸のまわりに 1 回転してできる回転面 Q と 2 平面 $z=y+1$ および $z=y-1$ によって囲まれる立体図形を K とする。

(1) 回転面 Q 上の点を $\mathrm{P}(x, y, z)$ とするとき, x^2+y^2 を z で表せ。

(2) 平面 $z=y+t$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ を α とし, 回転面 Q の方程式と平面 α の方程式から z を消去することによって, 平面 α による K の切り口の xy 平面上への正射影の周の方程式および正射影の面積を求めよ。

(3) 平面 α による K の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ。

(4) K の体積 V を求めよ。

（東京理科大）

・何事も試されているのは,「どれだけ一生懸命になれるか！！」

$\boxed{3}$

座標空間において, yz 平面上の線分 $y+z=1$ $(0 \leqq y \leqq 1)$ を z 軸のまわりに回転して得られる円錐 C がある。

(1) 円錐 C 上の点(x, y, z)は $x^2+y^2=(1-z)^2$ を満たすことを示せ。

(2) 円錐 C を平面 $y+z=t$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ で切ったときの切り口の面積 $S(t)$ を求めよ。

(3) 円錐 C を平面 $y+z=\dfrac{1}{2}$ で切ったとき, この平面より上側にある部分の体積 V を求めよ。

(横浜市立大)

・もしあなたが泣いたことがないのなら,
あなたの目は美しいはずがない。

14．立体の共通部分の体積

$\boxed{1}$

xyz 空間において，平面 $z=0$ 上の原点を中心とする半径 2 の円を底面とし，点$(0,0,1)$ を頂点とする円すいを A とする。次に，平面 $z=0$ 上の点$(1,0,0)$ を中心とする半径 1 の円を H，平面 $z=1$ 上の点$(1,0,1)$ を中心とする半径 1 の円を K とする。H と K を 2 つの底面とする円柱を B とする。円すい A と円柱 B の共通部分を C とする。$0 \leqq t \leqq 1$ をみたす実数 t に対し，平面 $z=t$ による C の切り口の面積を $S(t)$ とおく。

(1) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。$t=1-\cos\theta$ のとき，$S(t)$ を θ で表せ。

(2) C の体積 $\displaystyle\int_0^1 S(t)dt$ を求めよ。

（東京大）

$\boxed{2}$

xyz 空間に 4 点 $\mathrm{P}(0,0,2)$，$\mathrm{A}(0,2,0)$，$\mathrm{B}(\sqrt{3},-1,0)$，$\mathrm{C}(-\sqrt{3},-1,0)$ をとる。四面体 PABC の $x^2+y^2 \geqq 1$ をみたす部分の体積を求めよ。

（東工大）

・他人と過去は変えられない。
　自分と未来は変えられる。

$\boxed{3}$

xyz 空間に 3 点 O$(0, 0, 0)$, A$(1, 0, 1)$, B$(0, \sqrt{3}, 1)$ がある。平面 $z=0$ に含まれ, 中心が O, 半径が 1 の円を W とする。点 P が線分 OA 上を, 点 Q が円 W の周および内部を動くとき, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をみたす点 R 全体がつくる立体を V_A とおく。同様に点 P が線分 OB 上を, 点 Q が円 W の周および内部を動くとき, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をみたす点 R 全体がつくる立体を V_B とおく。さらに V_A と V_B の重なり合う部分を V とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 平面 $z=\cos\theta$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ による立体 V の切り口の面積を θ を用いて表せ。

(2) 立体 V の体積を求めよ。

（大阪大）

$\boxed{4}$

座標空間において, xy 平面内で不等式 $|x| \leqq 1$, $|y| \leqq 1$ により定まる正方形 S の 4 つの頂点を A$(-1, 1, 0)$, B$(1, 1, 0)$, C$(1, -1, 0)$, D$(-1, -1, 0)$ とする。正方形 S を, 直線 BD を軸として回転させてできる立体を V_1, 直線 AC を軸として回転させてできる立体を V_2 とする。

(1) $0 \leqq t < 1$ を満たす実数 t に対し, 平面 $x=t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ。

(2) V_1 と V_2 の共通部分の体積を求めよ。

（東京大）

・チャレンジして失敗を恐れるよりも, 何もしないことを恐れろ。

15 . その他

$\boxed{1}$

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ となることを示し, この式の値を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$ の値を求めよ。

(芝浦工業大)

$\boxed{2}$

xy 平面において, 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ によって囲まれた図形を直線 $y=x$ のまわりに回転させてできる回転体の体積を求めよ。

(慶応大)

・自分の考えたとおりに生きなければならない。
　そうでないと, 自分が生きたように考えてしまう。

$\boxed{3}$

$I_n=\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|dx$　$(n=1, 2, \cdots)$ において, $\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ。

（東工大）

$\boxed{4}$

曲線 $y=e^{-x}$ と $y=e^{-x}|\cos x|$ で囲まれた図形のうち, $(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ をみたす部分の面積を a_n とする $(n=1, 2, 3, \cdots)$。以下の問に答えよ。

(1) $\int e^{-x}\cos x dx=e^{-x}(p\sin x+q\cos x)+C$ をみたす定数 p, q を求めよ。
ただし, C は積分定数である。

(2) a_1 の値を求めよ。

(3) a_n の値を求めよ。

(4) $\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ を求めよ。

（早稲田大）

・運は, つかむべく努力している人のもとに訪れる。