

放物線 $y = ax^2$ ($a > 0$) と円 $(x-b)^2 + (y-1)^2 = 1$ ($b > 0$) が点 $P(p, q)$ で接しているとする。ただし、 $0 < p < b$ とする。この円の中心 Q から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点を R としたとき、 $\angle PQR = 120^\circ$ であるとする。ここで、放物線と円が点 P で接するとは、 P が放物線と円の共有点であり、かつ点 P における放物線の接線と点 P における円の接線が一致することである。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) 点 P と点 R を結ぶ短い方の弧と x 軸、および放物線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(名古屋大)