$a_1=0$, $a_{n+1}=\log(a_n+e)$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の収束について調べたい。以下の問いに答えなさい。

(1) 方程式 $x=\log(x+e)$ は $x>0$ の範囲でただ 1 つの実数解 β をもつことを証明しなさい。

(2) すべての自然数 n について $0 \leqq a_n < \beta$ が成り立つことを証明しなさい。

(3) $0<a<b$ のとき $\log b - \log a < \dfrac{b-a}{a}$ が成り立つことを証明しなさい。

(4) すべての自然数 n について $\beta - a_{n+1} < \dfrac{1}{e}(\beta - a_n)$ が成り立つことを証明し, これを用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \beta$ を示しなさい。

（慶応大）