

n は 2 以上の自然数とする。関数

$$y = e^x \quad \dots\dots(\text{ア})$$

$$y = e^{nx} - 1 \quad \dots\dots(\text{イ})$$

について以下の問いに答えよ。

(1) (ア) と (イ) のグラフは第 1 象限においてただひとつの交点を持つことを示せ。

(2) (1) で得られた交点の座標を (a_n, b_n) としたとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{と} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$$

を求めよ。

(3) 第 1 象限内で (ア) と (イ) のグラフおよび y 軸で囲まれた部分の面積を S_n とおく。

このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n S_n$$

を求めよ。

(東工大)