

相異なる 4 つの複素数 z_1, z_2, z_3, z_4 に対して

$$w = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$$

とおく。このとき、以下を証明せよ。

(1) 複素数 z が単位円上にあるための必要十分条件は

$$\bar{z} = \frac{1}{z} \text{ である。}$$

(2) z_1, z_2, z_3, z_4 が単位円上にあるとき、 w は実数である。

(3) z_1, z_2, z_3 が単位円上にあり、 w が実数であれば、 z_4 は単位円上にある。

(京都大)