複素数平面上の点列 $\mathrm{A}_n\ (n \geqq 0)$ が複素数列 $a_n + ib_n$ (a_n, b_n は実数, i は虚数単位) を表すとする。極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n = a_\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b_\infty$ がともに存在するとき, 複素数 $a_\infty + ib_\infty$ を表す点 A_∞ を A_n の極限点ということにする。このとき次の問に答えよ。

(1) 複素数平面上の点列 $\mathrm{P}_n\ (n \geqq 0)$ を次のように定める。P_0 は 0 を表す点とし, P_1 は $1+i$ を表す点とする。以下 $n \geqq 2$ に対しては, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_{n-2}\mathrm{P}_{n-1}}$ を反時計まわりに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転し, 長さを $\dfrac{2}{3}$ 倍したベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$ となるように P_n を定める。P_n の極限点 P_∞ が表す複素数を求めよ。

(2) 点列 $\mathrm{Q}_n\ (n \geqq 0)$ は次のように定める。Q_0 は 0 を表す点とし, Q_1 は $z = x + iy$ を表す点とする。以下 $n \geqq 2$ に対しては, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{Q}_{n-2}\mathrm{Q}_{n-1}}$ を反時計まわりに $\dfrac{\pi}{6}$ 回転し, 長さを $\dfrac{1}{2}$ 倍したベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{Q}_{n-1}\mathrm{Q}_n}$ となるように Q_n を定める。Q_n の極限点 Q_∞ と (1) の P_∞ が一致するとき z を求めよ。

（東工大）