行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が次の条件 (D) を満たすとする。

(D) A の成分 a , b , c , d は整数である。また, 平面上の 4 点 $(0, 0)$, (a, b) , $(a+c, b+d)$, (c, d) は面積 1 の平行四辺形の 4 つの頂点をなす。

$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 行列 BA と $B^{-1}A$ も条件 (D) を満たすことを示せ。

(2) $c=0$ ならば, A に B , B^{-1} のどちらかを左から次々にかけることにより, 4 個の行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ のどれかにできることを示せ。

(3) $|a| \geqq |c| > 0$ とする。BA , $B^{-1}A$ の少なくともどちらか一方は, それを $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とすると

$$|x|+|z|<|a|+|c|$$

を満たすことを示せ。

（東京大）