2 行 2 列の行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ を考える。A において, b と c を入れかえた行列を A^T で表す。すなわち, $A^T=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ である。同様に, $B^T=\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ とおく。以下で, B はつねに $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ をみたすものとする。

(1) $A^T=-A$ となるための必要十分条件は $A=\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ であることを証明しなさい。

(2) $A=\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ のとき, すべての B に対して $BAB^T=A$ となることを証明しなさい。

(3) すべての B に対して $BAB^T=A$ が成り立つならば, $A=\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ であることを証明しなさい。

（慶応大）