

関数 $f(x)$ はすべての実数 s, t に対して

$$f(s+t) = f(s)e^t + f(t)e^s$$

を満たし、さらに $x=0$ では微分可能で $f'(0)=1$ とする。

- (1) $f(0)$ を求めよ。
- (2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h}$ を求めよ。
- (3) 関数 $f(x)$ はすべての x で微分可能であることを、微分の定義に従って示せ。さらに $f'(x)$ を $f(x)$ を用いて表せ。
- (4) 関数 $g(x)$ を $g(x) = f(x)e^{-x}$ で定める。 $g'(x)$ を計算して、関数 $f(x)$ を求めよ。

(東京理科大)