(1) 0 以上の整数 m , n $=0, 1, 2, \cdots$ に対し, $I(m, n)$ を

$$I(m, n)=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$$

で定める。

（ i ） $m \geqq 1$ のとき, 部分積分法を用いて,

$$I(m, n)=\frac{m}{n+1}\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n+1}dx$$

が成り立つことを示しなさい。

（ ii ） $I(m, n)=\dfrac{m!n!}{(m+n+1)!}$ を示しなさい。

(2) $f(x)$ を区間 $[0, 1]$ で定義された連続関数とする。自然数 $n=1, 2, 3, \cdots$ に対し, 多項式 $P_n(x)$ を

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}$$

で定める。ここで, ${}_nC_k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ である。このとき,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 P_n(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$$

となることを示しなさい。

（東京理科大）